

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

9. előkészítő évfolyam

1. Egy futballmérkőzésen 2019 néző volt. A hazai csapat szurkolói kétszer annyian voltak, mint a vendégcsapat szurkolói. A hazai csapat szurkolói között 500-zal több férfi volt, mint nő. Hány női szurkolója volt a mérkőzésen a hazai csapatnak?
(A fiatakorúakat is a férfiak, ill. nők közé számoltuk.)
12 pont
2. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge négyszerese a háromszög egy másik szögének. Mekkora ezek a szögek?
12 pont
3. Az Á, O, J, N, S betűk mindegyikének egyszeri felhasználásával hány ötbetűs szó képezhető? Ha ezeket a szavakat ABC sorrendbe írjuk, akkor hányadik helyen áll a JÁNOS szó? Válaszaidat indokold! (A képzett szavaknak nem kell értelmesnek lenni.)
12 pont

A következő két feladatnál nem kérünk indoklást, csak a válaszokat kell megadni.

4. Hány olyan egész szám van,
 - a) amelynek az abszolút értéke kisebb 10-nél,
 - b) amelynek az abszolút értéke kisebb n -nél, ha n pozitív egész szám,
 - c) amely 1 és 100 közé esik és osztható 3-mal,
 - d) amely 1 és 100 közé esik és osztható 7-tel,
 - e) amely 1 és 100 közé esik és osztható 3-mal vagy 7-tel?14 pont
5. Egy zsákban 11 piros, 8 fehér és 6 fekete golyó van. Hány golyót kell becsukott szemmel kivenni, hogy a kivettek között biztosan legyen
 - a) fehér vagy fekete,
 - b) fehér és fekete,
 - c) 2 fehér és 5 fekete.
 - d) 5 fehér és 2 fekete.
 - e) több fehér, mint fekete,
 - f) három azonos színű,
 - g) n azonos színű? (n 1-nél nagyobb és 7-nél kisebb pozitív egész.)16 pont
6. András és Béla újságot árultak. Hétfőn Béla 25 %-kal több újságot adott el, mint András. Kedden András ugyanannyi újságot adott el, mint hétfőn, de ez most is kevesebb volt, mint amennyit Béla adott el, pontosan 20 %-kal volt kevesebb. Hétfőn vagy kedden adott el több újságot Béla?
16 pont
7. Egy O középpontú 6 cm sugarú körhöz az O ponttól 10 cm-re levő P pontból húzott két érintő az A és B pontokban érinti a kört. Mekkora a PA és PB érintőszakaszok? Mekkora az $OAPB$ négyszög területe? Mekkora az AB szakasz? Mekkora részekre osztja az AB szakasz az OP szakaszt?
18 pont

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

9. évfolyam

1. A 2019. év első futballmérkőzéséről az egyik újság azt írta, hogy 2019-nél több néző volt. Egy másik újság szerint 2021-nél több néző volt. Hány néző lehetett ezen a mérkőzésen, ha két újság közül csak az egyiknek volt igaza?

12 pont

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet, és ellenőrizzük a kapott gyököt.

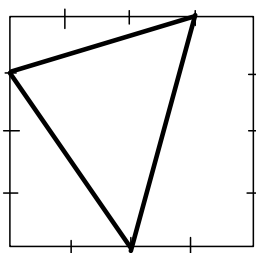
$$3x - 2(4 - x) = \frac{x}{2} + 10$$

12 pont

3. a) Egy városban a munkanélküliek száma 20%-kal csökkent, így jelenleg 600-an vannak. Hány munkanélküli volt eredetileg?

b) Egy másik városban egy év alatt 20 %-kal nőtt, majd a következő évben 20%-kal csökkent a munkanélküliek száma. Hogyan viszonyul ekkor a munkanélküliek száma a két évvel korábbihoz? Egyenlő azzal, vagy több, esetleg kevesebb? Ha több vagy kevesebb, akkor hány százalékkal több vagy kevesebb?

13 pont



4. Egy 8 cm oldalú négyzet oldalait négy egyenlő részre osztottuk, és az osztópontok közül hármat az ábra szerint összeköttöttünk. Mekkora a keletkezett belső háromszög területe?

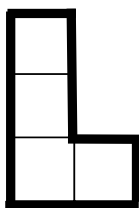
13 pont

5. Hány olyan prímszám van, amelynek nincs 6-tal osztható szomszédja?

13 pont

6. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AB. Az A csúcsból induló f_a szögfelező és m_a magasság 15° -os szöget zár be egymással. Mekkora a háromszög szögei?

17 pont



7. Van tetszőlegesen sok L alakú idomunk, amelyek négy db 1x1-es négyzetből állnak. Lefedhető-e egyrétűen, hézagmentesen ilyen L alakú idomokkal egy

- a) 4×4 es négyzet, b) 5×5 -ös négyzet,
c) 7×4 -es téglalap, d) 8×3 -as téglalap?
(Az L alakot lehet forgatni, tükrözni.)

20 pont

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

10. évfolyam

1. Egy téglalapban két oldal hosszának különbsége 2 cm, a téglalap területe 48 cm^2 . Mekkora a téglalap kerülete és átlója?

11 pont

2. Ha a p és $p+2$ számok mindegyike prím, akkor ikerprímeknek nevezzük őket. Mutassuk meg, hogy a négynél nagyobb ikerprímek közötti szám osztható 6-tal.

11 pont

3. Hozd egyszerűbb alakra, majd számológép használata nélkül állítsd növekvő sorrendbe az x, y, z számokat!

$$x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}, \quad y = 8 - \sqrt{3} - \sqrt{27}, \quad z = \left(\frac{11}{2} + 2\sqrt{3} \right) \cdot \left(\frac{7}{2} - 2\sqrt{3} \right).$$

13 pont

4. Az ABC derékszögű háromszög AC és BC befogója 5 cm, ill. 12 cm hosszú. D és E az AC és BC befogók pontjai úgy, hogy $AD:DC = BE:EC = 1:2$. Mekkora a DE szakasz és mekkora az ABED négyszög területe?

14 pont

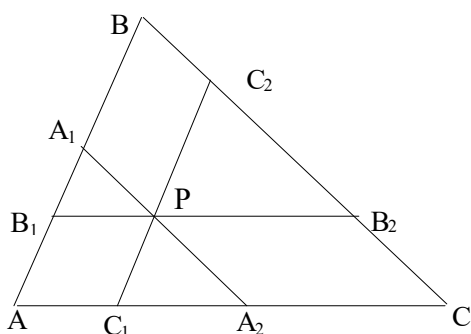
5. Egy kalapban 2019 cédula van, az 1, 2, 3, ... 2019 számokkal. Hányat kell kihúznunk, hogy biztosan legyen köztük két olyan szám, amelyek összege osztható 5-tel?

14 pont

6. Milyen p esetén lesz az $x^2 - px + 3p - 8 = 0$ egyenletnek

- a) két különböző valós gyöke,
- b) két különböző pozitív gyöke,
- c) egy 5-nél kisebb és egy 5-nél nagyobb gyöke?

17 pont



7. Az ABC háromszög belsejében levő P ponton át az ábra szerint párhuzamosokat húzunk az oldalakkal.

Igazoljuk, hogy $\frac{A_1A_2}{BC} + \frac{B_1B_2}{AC} + \frac{C_1C_2}{AB} = 2$.

20 pont

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

11. évfolyam

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amely tartalmaz 3-as számjegyet?

10 pont

2. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{6}{4x^2-1} + \frac{3}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = 1$$

11 pont

3. Az ABCD paralelogrammában AB=8 cm, BC=5 cm, $\angle CAB = 30^\circ$. Mekkora a paralelogramma szögei, és mekkora a paralelogramma területe?

13 pont

4. Számológép és közelítő értékek használata nélkül határozd meg a következő kifejezések pontos értékét.

$$a = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ, \quad b = \log_3 \sqrt{2} \cdot \log_2 \sqrt{3}, \quad c = 9^{\log_3 \sqrt{5}}$$

13 pont

5. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2x^2 + 4x - \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12$$

15 pont

6. Egy derékszögű trapéz egyik alapja 5 cm, a másik alap és a derékszögű szár összege 10 cm. Mekkora lehet a trapéz területének legnagyobb értéke? Mekkora lehet a trapéz kerületének legkisebb értéke?

18 pont

7. Egy téglalap oldalainak mértékszámai 5-nél nagyobb természetes számok. A terület és a kerület mértékszámának összege 2019. Mekkora a téglalap oldalai?

20 pont

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

12. évfolyam

1. Amikor még volt a forintnak váltópénze, (1 Ft = 100 fillér,) akkor egy lovas a lovát úgy hirdette eladásra, hogy csak a patkószegekért kell fizetni. Az első szegért 1 fillért, a másodikért 2 fillért, és így tovább, minden következőért kétszer annyit, mint az előzőért, és tudjuk, hogy minden patkóhoz 6 szeg tartozik.

Melyik a több, az utolsó szeg ára, vagy az előtte levő 3 szeg együttes ára?
100 Ft-ra kerekítve add meg, hogy mennyit kellett volna fizetni a lóért?

11 pont

2. Egy négyzet alapú egyenes hasáb (négyzetes oszlop) egy oldallapjának átlója 10 egység, a testátlója $\sqrt{136}$ egység. Mekkora a hasáb térfogata?

12 pont

3. Az 1, 2, 4, 5, 9 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával képezzük az összes lehetséges ötjegyű számot, majd ezek közül véletlenszerűen válasszunk ki egyet.

- a) Mennyi a valószínűsége, hogy a választott szám osztható 12-vel?
b) Mutassuk meg, hogy a képzett számok egyike sem négyzetszám.

14 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus trapézban a szár az alapok számtani közepe, akkor a magasság az alapok mértani közepe.

14 pont

5. a) Mennyi $2^x + 2^{-x}$ értéke, ha x olyan valós szám, amelyre $4^x + 4^{-x} = 23$.
b) Határozzuk meg $\lg x - \lg y$ értékét, ha x és y olyan pozitív számok, amelyekre

$$20x^2 - y^2 + 8xy = 0.$$

14 pont

6. Koordináta-rendszerben adottak az A(2;2) és B(9;9) pontok. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik az A és B pontokra és érinti az x tengelyt.

17 pont

7. Írjuk fel a páratlan pozitív egész számokat a következő háromszög alakú táblázatba úgy, hogy minden sorban eggyel több szám szerepeljen, mint az előzőben.

1,
3, 5,
7, 9, 11,
13, 15, 17, 19,
21, 23, 25, 27, 29,
...

- a) Ha folytatjuk a táblázatot, akkor milyen szám áll a 30-adik sor elején?
b) Mennyi a számok összege a 30. sorban?
c) Hányadik sorban, és hányadik helyen szerepel a 2019?

18 pont