1. Vannak-e olyan egészszámok, amelyek kielégítik a következő egyenletet?

   $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$

   Szabó Magda, Szabadka

2. Határozzuk meg az adott egyenletrendszer megoldását a valós számok halmazán!

   $x^{17} + y^{17} = 1$

   $x^{19} + y^{19} = xy$

   Szabó Magda, Szabadka

3. Egy teherautó kilométer számlálója meghibásodott, mert a hármas számjegyről ötösre vált, kihagyva a négyes számjegyet. Ha a hibás kilométer számláló 002011-et mutat, akkor hány kilométert tett meg a teherautó a valóságban?

   Kántor Sándorné, Debrecen

4. Egy kosárban csak alma és körte van, úgy, hogy a körték száma több mint az almáké. Ezután újabb almákat rakunk a kosárba, egészen addig, míg a kosárban levő gyümölcsöknek csak az egyharmada lesz körte. Majd sárgabarackot rakunk a kosárba mindaddig, amíg a kosárban levő gyümölcsöknek az egyötöde lesz körte. Ezután újabb körték berakásával megduplázzuk a kosárban levő körték számát. A kosárban levő gyümölcsöknek hanyadrésze lesz ekkor körte?

   Kántor Sándorné, Debrecen

5. A Mesesátorban arany fityingekért és ezüst fabatkákért lehet hangszereket vásárolni. Egy fityingért 100 fabatkát adnak, egy körtemuzsika pedig pontosan x fabatkát ér. 9 körtemuzsika együtt többet ér mint 11 fitying és kevesebbet mint 12 fitying. 13 körtemuzsika együtt többet ér 15 fityingnél és kevesebbet ér 16 fityingnél. Pontosan hány fityinget ér a körtemuzsika?

   Peics Hajnalka, Szabadka

6. Egy egyetemista megírt már néhány tesztet, és az utolsó megírása előtt számolgat: Ha az utolsót 97 írom, akkor az átlagom 90 pont lesz, ha csak 73 pontra sikerül, akkor is 87 pont lesz az átlagom. Hány tesztet írt eddig az egyetemista?

   Katz Sándor, Bonyhád

7. Egy téglalap pontosra oldalainak mértékszámai kétjegyű számok. A kerület és a terület mértékszámának összege 2011. Mekkora a téglalap területe?

   Katz Sándor, Bonyhád

8. Állapítsuk meg az $A = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha x pozitív valós szám.

   Katz Sándor, Bonyhád

9. Oldjuk meg a $3^y = x^2 - 22x + 40$ egyenletet a pozitív egész számok halmazán.

   Oláh György, Komárom

10. Legyen c átfogójú derékszögű háromszögnek nagyobbik befogója a, a kisebb b.

    Bizonyítsuk be, hogy $\frac{8}{9} < + \frac{c}{a + \frac{b}{2}} < 1$ (1)

Oláh György, Komárom

11. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $x^3 + \left(\frac{x}{2x-1}\right)^3 = \frac{243}{64}$.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

12. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x + \frac{x}{x-1} + \frac{x^2}{x^2-x+1} + \frac{x^4}{x^4-x^3+2x^2-2x+1} = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

13. Mennyi az (5 + 3tgx)2 + (5 −3ctgx)2 legkisebb értéke, amikor $x \in R \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in Z \right\}$.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

14. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, . . . 28 számokat. Egy-egy alkalommal letörlünk két a és b számot, s helyettük felírjuk az ab + 2a + 2b + 2 számot. Ezt ismételve 27-szer, csak egy szám fog maradni. Melyik ez a szám?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

15. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, egyenletekből álló egyenletrendszert, ahol $x; y; z$ egész számok és p pozitív prímszám!

$$p \cdot x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = p,$$
$$x + 2p \cdot y + z = 2p,$$
$$x + y + p \cdot z = 4p$$

Bíró Bálint, Eger

16. Oldjuk meg az $(x-10)\cdot(x-5)\cdot(x+3)\cdot(x+6) = 2x^3 + 2x^2 - 60x$ egyenletet, ha x egész szám!

Bíró Bálint, Eger

17. x, y számokról tudjuk, hogy $x > y$ és $xy = 1$. Bizonyítsd be, hogy $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$!

Balázsi Borbála, Beregszász

18. Legyenek a, b, c pozitív számok. Igazoljuk, hogy

$$27(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 27abc + 8(a+b+c)^3$$

Dályа Pál Péter, Szeged

19. Ha háromszög oldalaira érvényes az alábbi összefüggés: $a - b = b - c \geq 0$, akkor igazoljuk, hogy a nagyság szerinti középső szög nem nagyobb mint 60°!

Szabó Magda, Szabadka

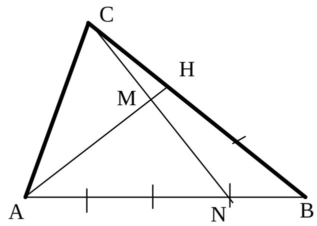
20. A konvex sokszög átlóinak metszéspontja az S pont. Az ASB háromszög területe 4 cm2 míg a CDS háromszögnek 9 cm2 . Mennyi lehet az ABCD négyszög minimális területe és ekkor milyen alakú a négyszög?

Szabó Magda, Szabadka

21. Egy ABC háromszögben AB = 5, AC = 6, BC = 7. A háromszög körülírt körén vegyük fel azt a D pontot, amelyre az AD egyenes a $BAC\sphericalangle$ szögfelezője. Határozza meg az AD és CD szakaszok hosszának az arányát!

Kántor Sándorné, Debrecen

22. Az ABC háromszögben legyen H a BC oldal C-hez közelebbi harmadoló pontja, N pedig az AB oldal B-hez közelebbi negyedelő pontja. Az AH és CN szakaszok metszéspontja M.



a) Milyen arányban osztja az M pont az AH és CN szakaszokat?
b) Hányad része az ABC háromszög területének a HMNB négyszög területe?

Katz Sándor, Bonyhád

23. Az ABC derékszögű háromszög befogói $BC = a$, és $CA = b$.A háromszögben megrajzoljuk az $AB = c$ átfogóhoz tartozó magasságot, ez az átfogót a D pontban metszi. Ezután az ACD háromszögbe olyan t_1 területű négyzetet rajzolunk, amelynek egyik csúcsa a D pont, többi csúcsa az ACD háromszög oldalain van, majd a BCD háromszögbe rajzolunk egy t_2 területű négyzetet, amelynek egyik csúcsa ismét a D pont, többi csúcsa a BCD háromszög oldalain van. Kössük össze az előbb megrajzolt négyzeteknek azokat az egymástól legtávolabbi csúcsait, amelyek közül az egyik az ABC háromszög BC befogóján, a másik az AB átfogón van, ez az egyenes a CD szakaszt olyan M pontban metszi, amelyre $MD = \frac{CD}{k}$, ahol k pozitív egész szám.

Bizonyítsuk be, hogy $t_1 + t_2 = \frac{(a+b)^2}{k^2}$!

Bíró Bálint, Eger

24. Az O középpontú $OA = 1$ sugarú körben kijelöljük a negyedkörnél kisebb AB ívet, tehát $AOB\sphericalangle < 90°$. Az AB ív belsejében kijelöljük a C és D pontokat úgy, hogy $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ és ezen íveknek nincs közös pontja. Meghúzzuk az érintőket B-ben, C-ben és D-ben. Ezeknek az OA félegyenesig terjedő szakaszaik legyenek rendre e_1, e_2, e_3.

Bizonyítandó, hogy az $\frac{e_1 \cdot e_2 \cdot e_3}{e_1 + e_2 + e_3}$ hányados értéke független a C és D pontok helyének választásától!

Kiss Sándor, Nyíregyháza

25. Igazoljuk, hogy derékszögű háromszögben érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{r^2}{s_a^2+s_b^2} \le \frac{3-\sqrt{8}}{5},$$

ahol s_a, s_b a befogókhoz tartozó súlyvonalak hosszát, r pedig a háromszögbe írható kör sugarát jelöli.

Pintér Ferenc, Nagykanizsa

26. ABCD egy olyan konvex négyszög, amelyben a (CD) oldal felezőmerőlegese átmegy az (AB) oldal felezőpontján. D-ben az AD-re, C-ben a BC-re húzott merőlegesek M-ben metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy $MA \cdot MC = MB \cdot MD$.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

27. Jelölje a, b és c egy háromszög oldalainak hosszát, míg R a körülírt és r beírt körének sugarát. Ha n egy 1-nél nagyobb pozitív egész, igazoljuk, hogy

$$\frac{na^2-(b-c)^2}{na^2} \cdot \frac{nb^2-(a-c)^2}{nb^2} \cdot \frac{nc^2-(a-b)^2}{nc^2} \ge \left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{2}{n}}$$

Dálya Pál Péter, Szeged

28. Van-e olyan 4020 természetes számot tartalmazó B halmaz, amelynek minden 2011 elemet tartalmazó részhalmazában az elemek összege nem osztható 2011-gyel!

Szabó Magda, Szabadka

29. Legyenek m és n olyan pozitív egész számok, amelyek relatív prímek, és $1 < m < n$ is teljesül. Bizonyítsa be, hogy $\frac{m}{n}$ előállítható (véges sok) különböző törzstört összegeként! (A törzstört olyan törtszám, amelynek számlálója 1, nevezője 1-nél nagyobb természetes szám.)

Kántor Sándor, Debrecen

30. Ha az 1116, 1474 és 2011 számokat az azonos d >1 számmal osztjuk, akkor a maradék is azonos r szám lesz. Add meg az összes háromjegyű számot, amelyeket ugyanezzel a d számmal osztva ugyanezt az r maradékot kapjuk!

Katz Sándor, Bonyhád

31. Bizonyítsd be, hogy az alábbi sorozatok mindegyikében végtelen sok összetett szám van!

a) $2^2+1,\quad 4^2+1,\quad 6^2+1,\quad 8^2+1,\ \ldots$

b) $4^2+1,\quad 14^2+1,\quad 24^2+1,\quad 34^2+1, \ldots$

Balázsi Borbála, Beregszász

32. Legyen p egy prímszám. Igazoljuk, hogy minden n ≥ 3 egész szám esetén léteznek olyan x, y, z pozitív egész számok, amelyekre $x^3+y^3+z^3 = p^n+3xyz$

Dálya Pál Péter, Szeged