10. osztály

1. Legyen egy háromszög három oldalának a hossza a, b, c. Bizonyítsuk be, hogy

$$3 \le \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \le 4$$

Mikor állhat fenn egyenlőség?

Kántor Sándorné, Debrecen

Megoldás

A feladatban szereplő kettős egyenlőtlenséget bontsuk két részre és végezzünk ekvivalens átalakításokat.

$$3 \le \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \le 4$$

$$3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \le 4(ab+bc+ca)$$

a) Bizonyítsuk először a bal oldalt:

$$3\,(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2 \qquad (1),$$

amiből

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \ge 0.$$

Kettővel való beszorzás, és a tagok csoportosítása után kapjuk, hogy

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0,$$

ami minden valós a , b , c értékre. igaz., így az (1) egyenlőtlenség is igaz.

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$, azaz szabályos a háromszög.

b) Nézzük most a jobb oldalt

$$(a + b + c)^2 \le 4\,(ab + bc + ca) \qquad (2)$$

egyenlőtlenséget ekvivalensen alakítjuk tovább. Így azt kell belátnunk, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 2\,(ab + bc + ca).$$

Mivel

$$2\,(ab + bc + ca) = a\,(b+c) + b\,(a+c) + c\,(b+a),$$

a háromszög-egyenlőtlenségek felhasználásával kapjuk, hogy

$$a^2 < a\,(b+c), \qquad b^2 < b\,(a+c), \qquad c^2 < c\,(b+a),$$

amiből már következik a bizonyítandó állítás.

Így az ekvivalens átalakítások miatt a (2) egyenlőtlenség is igaz, sőt egyenlőség soha nem állhat fent!

Mivel az átalakítások ekvivalensek, ezért a bizonyítást a visszafelé bizonyítás módszerére való hivatkozással lehet befejezni.

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} 4x^2 - 3y = xy^3 \\ x^2 + x^3y^2 = 2y \end{cases}$$

Balázsi Borbála, Beregszász

Megoldás

.Ha $x = 0$ vagy $y = 0$, kapjuk a $(0;0)$ megoldást.

Ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$, az első egyenletet szorozzuk meg x^2-tel, a másodikat y-nal és adjuk össze őket.

$$\begin{cases} 4x^4 - 3x^2y + x^2y = 2y^2 \\ x^2 + x^3y^2 = 2y \end{cases}$$

Első egyenletet szorzattá alakítva

$$\begin{cases} \left(y - x^2\right)\left(y + 2x^2\right) = 0 \\ x^2 + x^3y^2 = 2y \end{cases}$$

$$y = x^2 \text{ vagy } \quad y = -2x^2$$

Ezeket a második egyenletbe írva és kihasználva a kezdeti feltételt kapjuk, hogy

$$x^5 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 \quad \Rightarrow \qquad y = 1$$

és

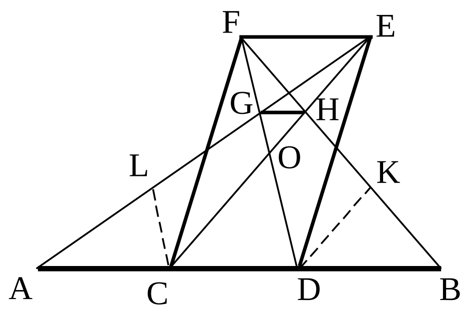
$$x^5 = -\frac{5}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{\sqrt[5]{40}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y = -\sqrt[5]{50}$$

Összesítve: három megoldás van: $(0;0); (1;1); \left(-\frac{1}{2}\sqrt[5]{40}; -\sqrt[5]{50}\right)$.

3. Az ***AB*** szakaszon vegyük fel a ***C*** és ***D*** pontokat úgy, hogy $AC = CD = DB$ legyen és legyen $CDEF$ egy tetszőleges paralelogramma. Legyen ***G*** az ***AE*** és ***DF***, ***H*** pedig a ***BF*** és ***CE*** metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $AB = 9GH$.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás



Legyen *O* a paralelogramma átlóinak metszéspontja és legyen $DK \| CE$, $CL \| DF$, $K \in BF$, $L \in AE$.

A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért a *DFK* háromszögben *(OH)* középvonal és $DK = 2 \cdot OH$.

A *CBH* háromszögben *(DK)* középvonal és $CH = 2 \cdot DK = 4 \cdot OH$, ahonnan $CO = 3 \cdot OH$.

Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $DO = 3 \cdot OG$.

A *COD* és *HOG* háromszögek hasonlóságából következik

$$\frac{CO}{HO} = \frac{DO}{GO} = \frac{CD}{HG} = 3$$

$CD = 3 \cdot GH$ és $AB = 3 \cdot CD$, tehát $AB = 9 \cdot GH$.

4. Egy ***2n*** oldalú, szimmetria középponttal rendelkező konvex sokszöglap (***P***) csúcspontjai közül kiválasztunk hármat, jelöljük őket ***A***, ***B***, ***C***-vel. Igazoljuk, hogy az ***ABC*** háromszög ***t*** területe nem nagyobb, mint $\frac{T}{2}$, ahol ***T*** a ***P*** sokszöglap területét jelöli.

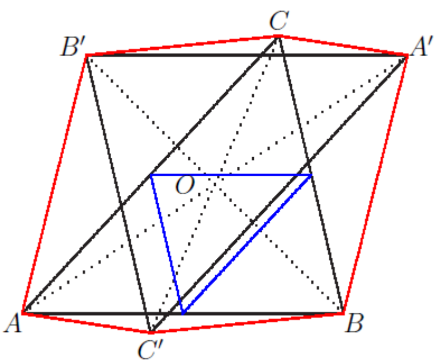
Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás

Jelölje *O* a *P* szimmetria középpontját és *A′*, *B′*, *C* rendre az *A*, *B*, *C* pontok *O*-ra vonatkozó szimmetrikusait. Három esetet lehetséges:

1. Eset. Ha *O* illeszkedik az *ABC* háromszög egyik oldalára, akkor ez csakis az oldal felezőpontja lehet, hiszen ellenkező esetben a konvex sokszög kettőnél több csúcsa is illeszkedne az illető oldal egyenesre, ami konvex sokszög esetén kizárt. Ha a háromszög harmadik csúcsát tükrözzük a szemközti oldal felezőpontjára (a szimmetria középpontra) nézve, akkor egy paralelogrammát kapunk, amelynek csúcsai a sokszög csúcsai közül valók, így a paralelogramma része a konvex sokszöglapnak, így területe nem nagyobb mint *T*, ami ebben az esetben igazolja a feladat állítását.

2. Eset. Ha *O* az *ABC* háromszöglapon kívül van, akkor az *O* ponton át húzhatunk egy olyan £ egyenest, amelyik nem metszi a háromszöglapot. Az *A*, *B*, *C* pontok és az *A′*, *B′*, *C* tükörképek az £ egyenes különböző oldalán helyezkednek el. Tehát az *ABC* és *A′B′C* egybevágó háromszöglapoknak nincs közös pontjuk és mindkettő a konvex sokszög része, így ebben az esetben $t < T/2$.



3. Eset. Ha *O* az *ABC* háromszöglap belső pontja (lásd a mellékelt ábrát), akkor mivel az A, B, C, A', B', C pontok a konvex sokszög csúcsai, következik, hogy *AC′BA′CB′* egy konvex hatszöglap, amely része a konvex sokszöglapnak. Nyilvánvalóan ahhoz, hogy a csúcsok tükörképei a háromszöglapon kívül kerüljenek, szükséges, hogy a szimmetria középpont az *ABC* háromszög középponti háromszögének belsejében legyen. Jelölje rendre *x*, *y*, *z* az *O* pontnak a *BC*, *CA*, *AB* egyenesektől mért távolságát, *a*, *b*, *c* a *BC*, *CA*, *AB* oldalak hosszát, míg m_a, m_b, m_c a megfelelő magasságokat, így mivel $t_{OBC} + t_{OCA} + t_{OAB} = t$, következik, hogy

$$\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}=t$$

Könnyen belátható, hogy $d(A',BC) = m_a - 2x$, $d(B',AC) = m_b - 2y$ és $d(C, AB) = m_c - 2z$.

Ezek alapján kiszámítható a konvex hatszöglap területe.

$$\begin{aligned}&t_{AC'BA'CB'} = t_{AC'B} + t_{BA'C} + t_{CB'A} + t = \\ &= \frac{c(m_c-2z)}{2} + \frac{a(m_a-2x)}{2} + \frac{b(m_b-2y)}{2} + t = \\ &= 4t - (ax+by+cz) = 4t - 2t = 2t\end{aligned}$$

Mivel a konvex hatszöglap része az eredeti konvex sokszöglapnak, következik, hogy $2t \le T$, ami igazolja a feladat állítását ebben az esetben is.

5. Hány olyan egyenlőszárú trapéz létezik, amelynek a kerülete 2011 és az oldalak mérőszáma egész szám?

Szabó Magda, Szabadka

Megoldás

A trapéz oldalai legyenek ebben a sorrendben $a;c;b;c$ és $a \geq b$ a párhuzamos oldalak. A feladat szerint

$$a + 2c + b = 2011$$

$$a + b = 2011 - 2c$$

Tehát a párhuzamos oldalak összege páratlan szám, azaz nem lehetnek egyformák. Tehát $a > b$ biztosan.

Igaz a következő egyenlőtlenség is:

$$a < c + b + c$$

azaz

$$2a < a + c + b + c$$

$$a < \frac{a + 2c + b}{2} = \frac{2011}{2}$$

Tehát az a valamely rögzített értékére az {1,2,3,...1005}halmazból a b értéke bármely a-nál kisebb érték lehet, de paritásban különbözőnek kell lenni, hiszen az összegük páratlan szám.

Ennek alapján a lehetőségek száma $\left[\frac{a}{2}\right]$ és ekkor a c értéke egyértelmű, hiszen

$$c = \frac{2011 - a - b}{2}$$

Tehát a trapéz is egyértelműen meghatározott az oldalaival.

A trapézok keresett száma:

$$\sum_{a=1}^{1005}\left[\frac{a}{2}\right] = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + ... + 501 + 501 + 502 + 502 =$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + ... + 502) = 2 \cdot \frac{502 \cdot 503}{2} = 252506$$

6. Adott nyolc különböző pozitív egész szám a tízes számrendszerben. Képezzük bármely kettő (pozitív) különbségét, majd az így kapott 28 számot szorozzuk össze. 6-nak melyik az a legnagyobb kitevőjű hatványa, amivel ez a szorzat biztosan osztható?

Kiss Sándor, Nyíregyháza

Megoldás

A következő állítások igazak:

Egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal.

Két szám különbsége csak akkor osztható 2-vel, ha azok paritása megegyezik (mindkettő páros vagy mindkettő páratlan.

Belátható, hogy négy páros és négy páratlan szám megadása esetén lesz a lehető legkevesebb páros tényező, ugyanis

$$\binom{x}{2}+\binom{8-x}{2}\geq 2\binom{4}{2}$$

A négy párosból és a négy páratlanból is 6-6 darab 2-vel osztható tényezőt lehet képezni, a többi társítás páratlan lesz. Ez azt jelenti, hogy 2-nek a 12. hatványával biztosan osztható lesz a 28 szám szorzata.

A hárommal való oszthatóság szempontjából a természetes számok algebrai alakja $3k,\ 3k+1,\ 3k+2$ lehet. Az azonos algebrai alakú számok különbsége osztható 3-mal.

Legkevesebb 3-mal osztható tényezőt akkor kapunk, ha a fenti alakú számok eloszlása 3, 3, 2, valamilyen sorrendben.

Ha valamelyik típusból 3 darab van, akkor abból 3 db hárommal osztható számot tudunk képezni. Ha valamelyikből csak 2, akkor 1 darab 3-mal oszthatót készíthetünk.

Így a 3 kitevője legalább 3 + 3 + 1 lesz, vagyis a 3 hetedik hatványával még biztosan osztható.

Összegezve: a 28 darab feladatbeli tényező a 6 hetedik hatványával még biztosan osztható.

A nyolcadikkal viszont nem feltétlenül, mert például az $\{1,2,3,...8\}$ esetén a szorzat csak 3-nak csak a 7. hatványával osztható.