11. osztály

1. Igazoljuk, hogy

$$\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}} < \frac{2}{3}$$

bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás

Az összeg egy tetszőleges tagja: $\frac{2^k}{1+2^{2^k}}$. Ezt bővítjük és alakítjuk úgy, hogy felbonthassuk két tört összegére.

$$\frac{2^k}{1+2^{2^k}} = \frac{2^k(2^{2^k}-1)}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)} = \frac{2^k\cdot 2^{2^k}-2^k}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)} = \frac{2^k\cdot 2^{2^k}+2^k-2^{k+1}}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)} = \frac{2^k(2^{2^k}+1)-2^{k+1}}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)}$$

$$= \frac{2^k(2^{2^k}+1)}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)} - \frac{2^{k+1}}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)} = \frac{2^k}{2^{2^k}-1} - \frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1} \quad .$$

Ennek alapján: $\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{1+2^{2^k}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{2^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}\right) =$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1} < \frac{2}{3} \quad .$$

Általánosítás:

$$\frac{2}{1+p^2}+\frac{2^2}{1+p^{2^2}}+\ \ldots\ +\frac{2^n}{1+p^{2^n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{1+p^{2^k}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{p^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{p^{2^{k+1}}-1}\right) =$$

$$= \frac{2}{p^2-1} - \frac{2^{n+1}}{p^{2^{n+1}}-1} < \frac{2}{p^2-1}\ , \text{ ha } p > 1 .$$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$6\sqrt{x-2}+10\sqrt{2x+3}+12\sqrt{3x+3}=6x+74$$

egyenletet.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás

Az egyenlet értelmezett, ha $x\in[2,\infty)$.

Az egyenletet átírjuk három négyzet összegére:

$$\left(x-2-6\sqrt{x-2}+9\right)+\left(2x+3-10\sqrt{2x+3}+25\right)+\left(3x+3-12\sqrt{3x+3}+36\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2x+3}-5\right)^2+\left(\sqrt{3x+3}-6\right)^2=0 .$$

Ez az egyenlőség a valós számok halmazán csak akkor lehetséges, ha

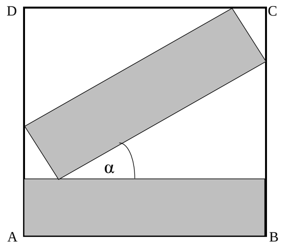
$$\sqrt{x-2}-3=0 \text{ és } \sqrt{2x+3}-5=0 \text{ és } \sqrt{3x+3}-6=0,$$

Mind a három egyenlet megoldása $x=11$.

Az egyenlet megoldása $x=11$.

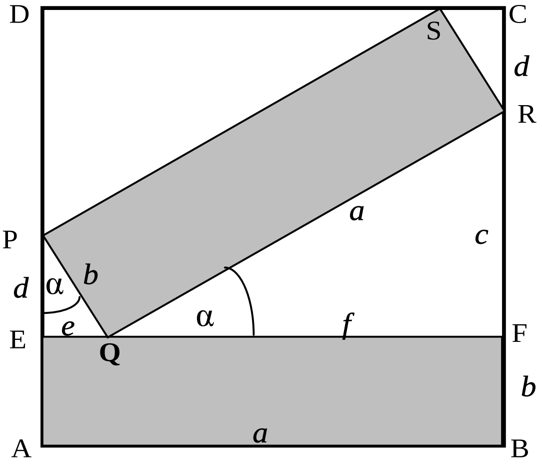
3. Egy négyzetbe az ábra szerint két egybevágó téglalapot írunk. Mekkora az α szög?

dr. Katz Sándor, Bonyhád



Megoldás

I. megoldás:



Az ábra jelöléseivel: (1.) $b+c+d=a,$

(2.) $e+f=a.$

EPQ Δ ~QFR Δ, mert mindegyik derékszögű és az α-val jelölt szögek merőleges szárúak.

Így a megfelelő oldalak aránya is egyenlő:

(3.) $e/b=c/a,$

(4.) $d/b=f/a.$

(1.)-ből: $b\left(1+\frac{d}{b}\right)=a\left(1-\frac{c}{a}\right)$, ebből és

(4.)-ből: (5.) $b\left(1+\frac{f}{a}\right)=a\left(1-\frac{c}{a}\right).$

(2.)-ből: $a\left(1-\frac{f}{a}\right)=e$, ebből és

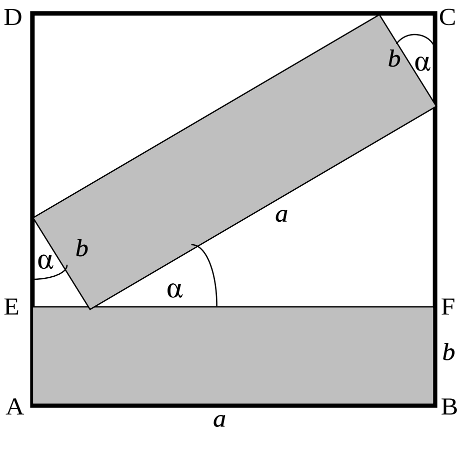
(3.) ból: (6.) $a\left(1-\frac{f}{a}\right)=\frac{bc}{a}$

Szorozzuk össze (5.)-öt és (6.)-ot:

$$1-\frac{f^2}{a^2}=\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{a^2-f^2}{a^2}=\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{c^2}{a^2}=\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2} \quad\Rightarrow\quad 2\cdot\frac{c^2}{a^2}=\frac{c}{a}.$$

Mivel $\frac{c}{a}\neq 0$, ezért $c=\frac{a}{2}$, tehát α = 30º

II. megoldás:



Az α-val jelölt két új szög az eredetivel merőleges szárú ezért mind egyenlők. Ha a téglalap oldalai *a* és *b*, akkor a BC oldalon:

$b+a\cdot\sin\alpha+b\cdot\cos\alpha=a$

$b(1+\cos\alpha)=a(1-\sin\alpha)$ (1.)

Az EF szakaszon:

$b\cdot\sin\alpha+a\cdot\cos\alpha=a$

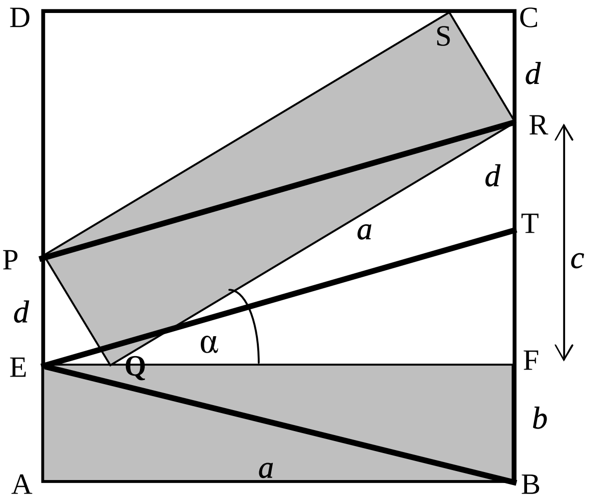
$a\cdot(1-\cos\alpha)=b\cdot\sin\alpha$ (2.)

(1.) et és (2.)-t összeszorozva :

$$1-\cos^2\alpha=\sin\alpha-\sin^2\alpha$$
$$2\sin^2\alpha-\sin\alpha=0$$
$$2\sin\alpha\,(\sin\alpha-1/2)=0$$

sin α ≠0, ezért sin α = ½, azaz α=30º.

III. megoldás:



Húzzuk be a két egybevágó téglalapban az EB és PR átlókat, ezek nyiván egyenlők.

Toljuk el a PR átlót a CR=PE=*d* szakasszal, ekkor az ETB egyenlő szárú háromszöget kapjuk, amelyben az EF magasság felezi a TB alapot, tehát TF=FB=*b*. Így a BC oldalon $2b+2d=a$, $\Rightarrow$ $b+d=c=a/2$.

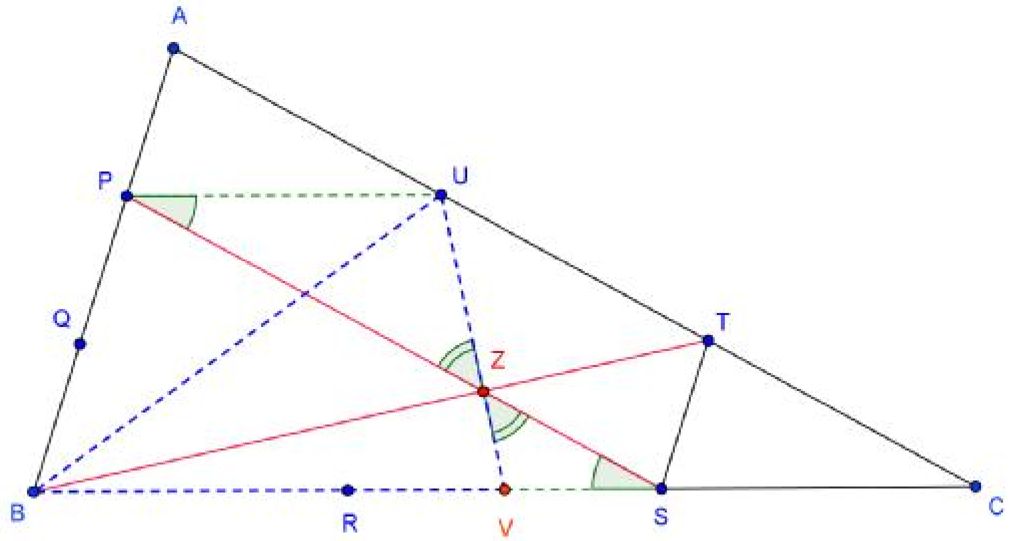
Az RQF derékszögű háromszög RF befogója fele az RQ átfogónak, tehát α=30º.

4. Legyen az ***ABC*** háromszög ***AB*** oldalának ***A***-hoz közelebbi harmadolópontja ***P***, az ***A***-tól távolabbi harmadolópontja ***Q***. Legyen továbbá a ***BC*** oldalon a ***B***-hez közelebbi harmadolópont ***R***, a ***B***-től távolabbi harmadolópont ***S***. Legyen a ***CA*** oldalon a ***C***-hez közelebbi harmadolópont ***T***, a ***C***-től távolabbi harmadolópont ***U***. Legyen a ***PS*** és ***BT*** szakaszok metszéspontját az ***U*** ponttal összekötő egyenes és a ***BC*** szakasz metszéspontja ***V***. Határozzuk meg a ***BUV*** háromszög és a ***PQRSTU*** hatszög területének arányát.

Bíró Bálint, Eger

Megoldás

Jelöléseink az ábrán láthatók.



A párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt az TS szakasz párhuzamos az AB oldallal, továbbá a párhuzamos szelőszakaszok tételéből következően $TS = \frac{1}{3}AB$.

Mivel azonban $BP = \frac{2}{3}AB$, ezért $\frac{TS}{BP} = \frac{1}{2}$.

A TZS és BZP háromszögek két-két szöge a TS és BP szakaszok párhuzamossága miatt egyenlő, tehát a TZS és BZP háromszögek megfelelő szögei egyenlők, vagyis a két háromszög hasonló. A hasonlóságból következik a megfelelő oldalak arányának egyenlősége, így ebből és előző eredményünkből $\frac{TS}{BP} = \frac{ZS}{ZP} = \frac{ZT}{ZB} = \frac{1}{2}$ következik, tehát a Z pont a PS szakasz S ponthoz közelebb eső harmadolópontja.

Ismét a párhuzamos szelők tételének megfordításából következik, hogy az UP szakasz párhuzamos a BC oldallal, és a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $UP = \frac{1}{3}BC$.

Az UPZ és VSZ háromszögekben két-két szög megegyezik, mert az UP és VS szakaszok párhuzamosak, a két háromszög megfelelő szögei egyenlők, tehát a két háromszög hasonló, ezért a megfelelő oldalak aránya is egyenlő, azaz $\frac{VS}{UP} = \frac{VZ}{UZ} = \frac{ZS}{ZP}$. Ugyanakkor az előzőekben igazoltuk, hogy $\frac{ZS}{ZP}=\frac{1}{2}$, ezért $\frac{VS}{UP}=\frac{VZ}{UZ}=\frac{ZS}{ZP}=\frac{1}{2}$. Eszerint a VS szakasz hossza az UP szakasz hosszának a felével egyenlő, de ebből $UP=\frac{1}{3}BC$ miatt $VS=\frac{1}{6}BC$ következik.

Ezért $VS+SC=\frac{1}{6}BC+\frac{1}{3}BC=\frac{1}{2}BC$, vagyis a V pont a BC szakasz felezőpontja.

Az UBC háromszögben tehát az UV szakasz súlyvonal, amely felezi az UBC háromszög területét, azaz $T_{BUV}=\frac{1}{2}T_{UBC}$.

Könnyen látható, hogy az UBC háromszög területe az ABC háromszög területének kétharmad része, hiszen $\frac{UC}{AC}=\frac{2}{3}$, és az UC illetve AC oldalakhoz tartozó magasság a két háromszögben egyenlő.

Ebből rögtön következik, hogy $T_{BUV}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}T_{ABC}=\frac{1}{3}T_{ABC}$, vagyis a BUV és az ABC háromszögek területének aránya $\frac{1}{3}$. Nyilvánvaló, hogy $\frac{T_{APU}}{T_{ABC}}=\frac{1}{9}$, hiszen a két háromszög szögei a megfelelő oldalak egy egyenesbe esése illetve párhuzamossága miatt egyenlők, ezért a két háromszög hasonló és a megfelelő oldalak aránya $\frac{1}{3}$. Hasonlóan látható be, hogy

$$\frac{T_{BRQ}}{T_{ABC}}=\frac{1}{9} \text{ és } \frac{T_{CTS}}{T_{ABC}}=\frac{1}{9}, \text{ így } T_{APU}+T_{BRQ}+T_{CTS}=\frac{1}{3}\cdot T_{ABC}.$$

Ebből következik, hogy $T_{PQRSTU}=\frac{2}{3}\cdot T_{ABC}$.

Mivel előző eredményünk szerint $T_{BUV}=\frac{1}{3}\cdot T_{ABC}$, ezért $\frac{T_{BUV}}{T_{PQRSTU}}=\frac{1}{2}$.

5. Egy 10x10-es táblázat minden sorába és minden oszlopába az ábrán látható módon beírjuk a számokat 0-tól 9-ig, majd minden sorban és minden oszlopban bekeretezünk pontosan 1 számot, tehát összesen 10-et. Van-e a bekeretezett számok között mindig legalább két azonos szám?

0	1	2	…	9
9	0	1	…	8
8	9	0	…	7
…	…	…	…	…
1	2	3	…	0

Szabó Magda, Szabadka

Megoldás

Vegyük észre, hogy a táblázat tetszőleges elemét megkaphatnánk úgy is, hogy a sorának az első eleméhez hozzáadnánk az oszlopának az első elemét és vennénk ennek az összegnek a 10-es maradékát.

Most bebizonyítjuk, hogy lesz legalább két azonos szám.

Bizonyítsunk indirekten, azaz tegyük fel, hogy mind a 10 kiválasztott szám különböző.

Ekkor a kiválasztott számok összege $0+1+2+...+9=45$, ami 10-es maradéka 5.
Ezt megkaphatjuk úgy is, hogy az oszlop és sor összegeket adjuk össze, ami $2(0+1+2+...+9)=90$, aminek a 10-es maradéka 0.

Ez a két maradék nem egyezik meg, tehát ellentmondásra jutottunk, nem igaz a feltétel.

6. Jelölje tetszőleges pozitív egész ***n*** szám esetén $t(n)$ az ***n*** szám különböző prímosztóinak számát. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan pozitív egész ***n*** szám van, amelyre
   a.) $t(n^2+n)$ páratlan.
   b.) $t(n^2+n)$ páros.

Borbély József,Tata

Megoldás

Nyilvánvaló, hogy ha $(a;b)=1$, akkor $t(ab)=t(a)+t(b)$.

A feladatban ezt használva $(n;n+1)=1$ és $n^2+n=n(n+1)$, tehát

$$t(n^2+n)=t(n)+t(n+1)$$

Igazak a következő állítások (legyen $k>0$ egész szám):

Ha $n=2^k$, akkor végtelen sok páros számra $t(n)=1$, azaz páratlan

Ha $n=2\cdot 3^k$, akkor végtelen sok páros számra $t(n)=2$, azaz páros.

Ha $n=3^k$, akkor végtelen sok páratlan számra $t(n)=1$, azaz páratlan

Ha $n=3\cdot 5^k$, akkor végtelen sok páratlan számra $t(n)=2$, azaz páros.

Másképpen fogalmazva:

nem lehet, hogy páros ***n***-re $t(n)$ csak páros, vagy csak páratlan értéket vegyen fel

ugyancsak nem lehet, hogy páratlan ***n***-re $t(n)$ csak páros, vagy csak páratlan értéket vegyen fel.

Az elmondottakból következik, hogy

végtelen sokszor 2 egymás utáni számra a t függvény azonos paritású, ekkor $t(n^2+n)=$ páros

végtelen sokszor 2 egymás utáni szám különböző paritású, ekkor $t(n^2+n)=$ páratlan