9. osztály

1. „Fanyűvő és én együtt 20 nap alatt vágnánk ki a Nagy Kerek Erdőt” – mondja Törzsök Jankó. „Bár ha Erdődöntögetővel dolgoznék, akkor ezt a munkát öt nappal előbb befejeznénk.” „Nekem jobb ötletem van” – mondja Erdődöntögető. „Ha én dolgoznék együtt Fanyűvővel, akkor mi ketten egy ötödével kevesebb idő alatt végeznénk a munkával, mint ha Törzsök Jankóval dolgoznék.” Mennyi idő alatt vágnák ki a Nagy Kerek Erdőt külön-külön ezek az erős emberek, és mennyi idő alatt végeznének a munkával, ha mindhárman együtt dolgoznának?

Peics Hajnalka, Szabadka

Megoldás

Jelölje x, y illetve z, ugyanebben a sorrendben, a napoknak a számát, amelyek alatt Fanyűvő, Törzsök Jankó, illetve Erdődöntögető kivágná a Nagy Kerek Erdőt. Ha az elvégzendő munkát 1-gyel jelöljük, akkor Fanyűvő, Törzsök Jankó, illetve Erdődöntögető a munka $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ illetve $\frac{1}{z}$ részét végezné el egy nap alatt. A feladat feltételei alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{20}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{15}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

A fenti háromismeretlenes egyenletrendszert kell megoldani.
Összeadva a három egyenletet, némi rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}.$$

Ez azt jelenti, hogy mindhárman együtt dolgozva egy nap alatt a munka $\frac{1}{10}$ részét végeznék el, a teljes munkát pedig 10 nap alatt.

Ebből adódik, hogy

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30},$$

vagyis $x=30$.

Hasonló módon kapjuk meg, hogy $y=60$, $z=20$.

Tehát a Nagy Kerek Erdőt Fanyűvő 30 nap alatt, Törzsök Jankó 60 nap alatt, Erdődöntögető pedig 20 nap alatt vágná ki.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in N^+$ számra a $(2n+1)^2 + (2n+2)^2 + (2n+3)^2$ kifejezés felírható 4 különböző pozitív egész szám négyzetösszegeként.

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás

Jelöljük (az egyszerűség kedvéért) a középső számot $2a = 2n+2$ $(n = a-1)$. Így a következőt kellene belátni:

$$(2a-1)^2 + (2a)^2 + (2a+1)^2$$

Felbontható 4 különböző négyzetszám összegére.

Elvégezve a kijelölt műveleteket és csoportosítva:

$$(2a-1)^2 + (2a)^2 + (2a+1)^2 = 4a^2 - 4a + 1 + 4a^2 + 4a^2 + 4a + 1 =$$

$$12a^2 + 2 = a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 1 + 9a^2 = (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (3a)^2$$

Mivel $a-1 < a < a+1$, ezért ezek különbözők, ha

$$a-1 \neq 3a \text{ és } a \neq 3a \text{ és } a+1 \neq 3a$$

Ezek teljesülnek, hiszen „a” értéke egész szám. Visszatérve az „***n***”-re

$$(a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (3a)^2 = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (3n+3)^2$$

a keresett felbontás.

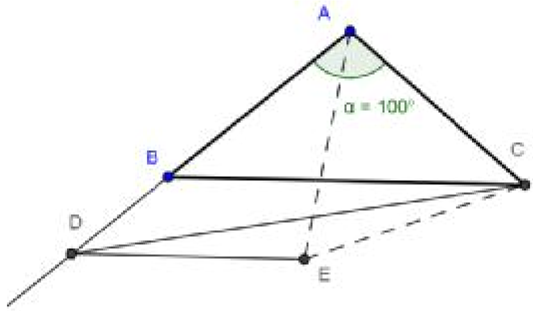
3. Az ***ABC*** egyenlő szárú háromszögben ***A***∢ =100°. Vegyük fel az ***AB*** szár ***B***-n túli meghosszabbításán a ***D*** pontot úgy, hogy ***AD***=***BC*** legyen. Mekkorák a ***BCD*** háromszög szögei?

Katz Sándor, Bonyhád

Megoldás

ABC ∢ = 40° ⇒ DBC ∢ = 140°.

AD=BC, ezért vegyük fel az eredetivel egybevágó ADE háromszöget!



DAE ∢ = 40° ⇒ EAC ∢ =100°-40°=60°

AE=AC ⇒ αz AEC háromszög szabályos,

AEC ∢ =ACE ∢ = 60°.

DEC ∢ = 100°+60°=160°

DE=EC ⇒ EDC ∢ = ECD ∢ = 10°.

DCB ∢= ACE ∢ - ECD ∢ - ACB ∢ =60° - 10° - 40° = 10°

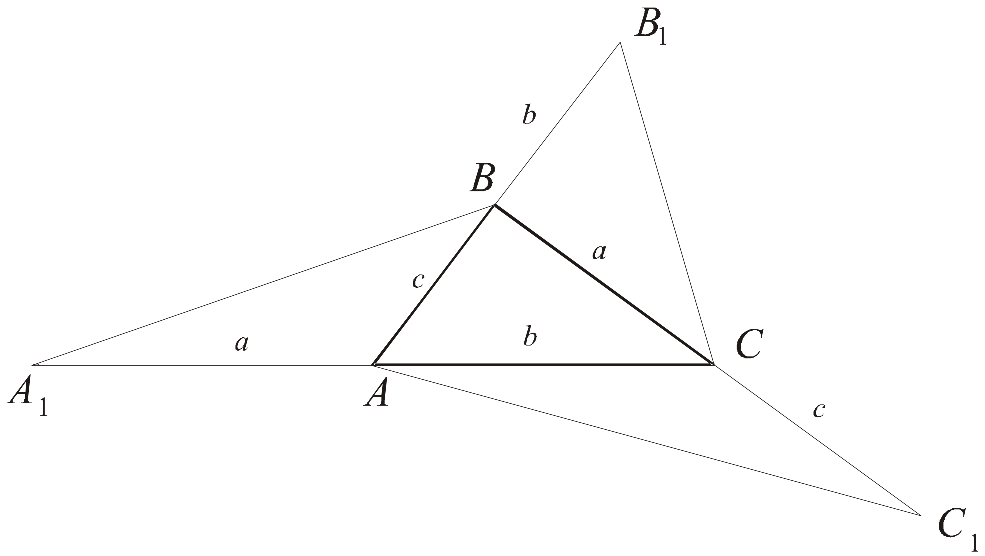
BDC ∢ = 180° - DBC ∢ - BCD ∢ = 180° -140° - 10° = 30°

4. Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalait meghosszabbítjuk a B, C és A pontokon túl a BB_1, CC_1, AA_1 szakaszokkal úgy, hogy $BB_1 = AC$, $CC_1 = AB$, $AA_1 = BC$ legyen. Jelölje továbbá az ABC, AA_1B, BB_1C, CC_1A háromszögek területét $T_{ABC}, T_{AA_1B}, T_{BB_1C}, T_{CC_1A}$. Mutassuk meg, hogy $T_{AA_1B} + T_{BB_1C} + T_{CC_1A} \geq 3T_{ABC}$.

Pintér Ferenc, Nagykanizsa

Megoldás

Vezessük be a háromszög oldalaira a szokásos jelöléseket:



Ismert (könnyen belátható), hogy

$$\frac{T_{AA_1B}}{T_{ABC}} = \frac{a}{b}, \quad \frac{T_{BB_1C}}{T_{ABC}} = \frac{b}{c}, \quad \frac{T_{CC_1A}}{T_{ABC}} = \frac{c}{a}.$$

A három egyenletet összeszorozva a következőt kapjuk:

$$\frac{T_{AA_1B} \cdot T_{BB_1C} \cdot T_{CC_1A}}{T_{ABC}^3} = 1, \qquad \text{azaz}$$

$$T_{AA_1B} \cdot T_{BB_1C} \cdot T_{CC_1A} = T_{ABC}^3.$$

Utóbbi összefüggés alkalmat ad a számtani – mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazására

$$T_{ABC} = \sqrt[3]{T_{AA_1B} \cdot T_{BB_1C} \cdot T_{CC_1A}} \leq \frac{T_{AA_1B} + T_{BB_1C} + T_{CC_1A}}{3}, \qquad \text{azaz}$$

$$3T_{ABC} \leq T_{AA_1B} + T_{BB_1C} + T_{CC_1A}.$$

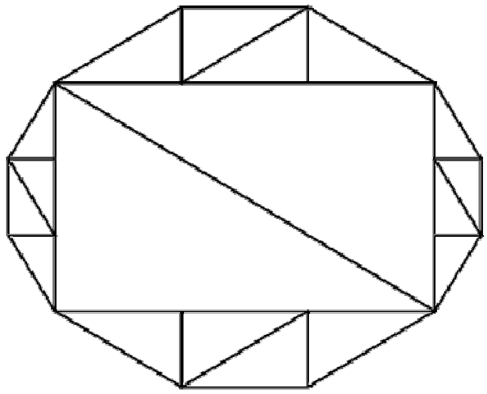
Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

5. Legfeljebb hány oldalú az a konvex sokszög, amely feldarabolható olyan derékszögű háromszögekre, amelyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak? (A feldarabolás során csak ilyen háromszög keletkezhet, másféle sokszög nem).

Kiss Sándor, Nyíregyháza

Megoldás

Tegyük fel, hogy egy konvex sokszög feldarabolható a kívánt módon.



Mivel a felosztásban szereplő háromszögek minden szöge 30^o egész számú többszöröse, ugyanez igaz a sokszög minden egyes szögére, vagyis azok legfeljebb 150^o-os szögek lehetnek.

Ennek megfelelően a sokszög minden külső szöge legalább 30^o-os.

Mivel ezek összege 360^o, a sokszögnek legfeljebb 12 oldala lehet.

Az ábrán egy megfelelő 12 oldalú sokszöget láthatunk. Ez úgy keletkezett, hogy először két megfelelő egybevágó háromszöget egy téglalappá illesztettünk össze. Ezután a hosszabbik oldalak fölé harmad ekkora háromszögekből összerakott szimmetrikus trapézokat illesztettünk, és hasonlóképpen jártunk el a rövidebb oldalakat illetően is.

6. A 957 háromjegyű szám mögé írjunk három számjegyet úgy, hogy a kapott hatjegyű szám osztható legyen 9-cel, 5-tel és 7-tel is! Melyek ezek a háromjegyű számok?

Pintér Ferenc, Nagykanizsa

Megoldás

Mivel az 5, 7 és 9 páronként relatív prímek, ezért a keresett hatjegyű számnak oszthatónak kell lenni $9 \cdot 7 \cdot 5 = 315$-tel.

Másrészt $957000 = 3038 \cdot 315 + 30$, ezért a keresett számok

$957\overline{abc} = 3038 \cdot 315 + 30 + \overline{abc}$ alakúak,

ahonnan $30 + \overline{abc}$ lehetséges értékei 315,

2·315 = 630, 3·315 = 945 lehet,

így $\overline{abc}$ vagy 285, vagy 600 vagy 915.