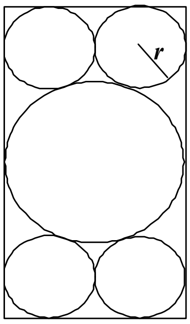
Belső vizsga 10. osztály számára 2015. emelt szint

1. Igazolja a háromszög területének kiszámítására használt $t = rs$, és hegyesszögű háromszög területére a $t = \frac{abc}{4R}$ képleteket! 6 + 7 p.



2. Egy téglalapba az ábra szerint öt érintkező kört írunk, amelyből négynek a sugara $r = 2$ cm. Mekkorák a téglalap oldalai?

12 p.

3. Legfeljebb mekkora területű az a trapéz, amelynek egyik alapja a=10 cm, a másik alap és a magasság összege $c+m$=12 cm?

15 p.

A következő 4 feladatból hármat kell megoldani.
Dolgozatodon, a neved mellet jelöld a kihagyott feladat számát!

4. Oldd meg a valós számok halmazán!

a) $x^2 + 3 \geq 4x$, *b)* $\frac{x^2 - 4x + 3}{x} \geq 0$ *c)* $x^2 - 4x + \frac{3}{(x-2)^2} = 0$

4 + 6 + 10 p.

5. *a)* Hány $\overline{xyxy}$ alakú négyjegyű szám van, ahol x és y különböző számjegyek? Hány lesz ezek közül 4-gyel osztható?

b) Mely n természetes szám, és x és y számjegyekre lesz $1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{xyxy}$?

7 + 13 p.

6. Az ABC hegyesszögű háromszög A és B csúcsból húzott magasságai D és E pontban metszik a szemközti oldalt. A C csúcsban érintőt húzunk a háromszög köré írható körhöz. Igazoljuk, hogy az érintő párhuzamos a DE egyenessel ! Ha ACB∢ = 60°, és az ABC háromszög kerülete 12 cm, akkor mekkora az EDC háromszög kerülete?

20 p.

7. *a)* Ábrázold az $f(x) = |x-4|-1$ függvényt!
   b) Ábrázold a $g(x) = ||x-4|-1|$ függvényt!
   c) Az m paraméter milyen értéke esetén lesz az $||x-4|-1| = mx$ egyenletnek pontosan egy, ill. pontosan két megoldása?
   d) Az m paraméter milyen értéke esetén lesz az $||x-4|-1| = mx$ egyenletnek pontosan három megoldása? Mi lesz ez a három megoldás?

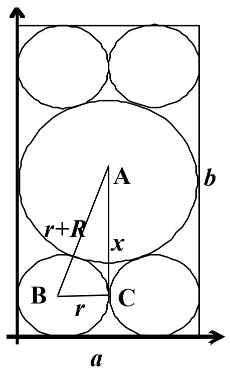
2 + 2 + 6 + 10 p.

Belső vizsga 10. osztály számára Megoldások 2015. emelt szint

1. Igazolja a háromszög területének kiszámítására használt $t = rs$, és hegyesszögű háromszög területére a $t = \frac{abc}{4R}$ képleteket!

A $t = rs$ képlet igazolása 6 p.,

a $t = \frac{abc}{4R}$ képlet igazolása 7 p.. **Ö.: 13 p.**



2. Egy téglalapba az ábra szerint öt érintkező kört írunk, amelyből négynek a sugara *r* = 2 cm. Mekkorák a téglalap oldalai?

$a = 4r = 8$ cm. 2 p. $R = 2r = 4$ cm 1 p.

Ha két kör kívülről érinti egymást,akkor a középpontok távolsága a két sugár összege, ezért AB = $r+R = 6$ cm. 1 p.

Az ABC háromszögben Pitagorsz tétel szerint

$x = \sqrt{(R+r)^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$ cm 4 p.

Így $b = 2r + 2x =$ $(4 + 2\sqrt{32})$ cm ≈ 15,31 cm. 4 p.

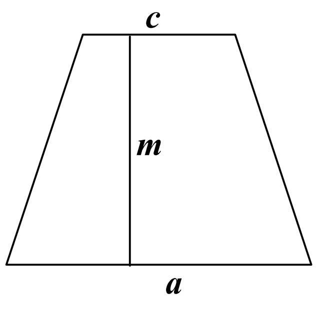
II. megoldás *b* kiszámolására

Helyezzük el az ábrát koordináta-rendszerbe: B(2;2), A(4; *b/2*) . 4 p.

AB = $r+R = 6 = \sqrt{(4-2)^2 + (b/2-2)^2}$, ebből $b = 2(2+\sqrt{32})$ cm ≈ 15,31 cm. 4 p.

Ö.: 12 p.

3. Legfeljebb mekkora területű az a trapéz, amelynek egyik alapja *a*=10 cm, a másik alap és a magasság összege *c*+*m*=12 cm?



$T = \frac{(a+c)m}{2} = \frac{(10+c)(12-c)}{2}$ 3 p.

Számtani és mértani közép összefüggésével meghatározhatjuk olyan szorzat maximumát, amelyben a tényezők összege állandó.

$T = \frac{(10+c)(12-c)}{2} \le \frac{\left(\frac{10+c+12-c}{2}\right)^2}{2} = \frac{121}{2}$ 5 p.

Látható, hogy a trapéz területe nem lehet nagyobb, mint 60,5 cm^2.

Ennyi akkor és csak akkor lehet ha 10+c=12-c, ⇒ c= 1 cm, m=11 cm. 6 p.

Ekkor a terület valóban T=[(10 cm +1 cm) · 11 cm]/2 = 60,5 cm^2 1 p.

Ö.: 15 p.

II. megoldás

A $T(c) = \frac{(10+c)(12-c)}{2} = -\frac{1}{2}c^2 + c + 60$ „fordított állású" parabolának a két zérushely számtani középénél van maximuma. c_1=-10, c_2=12, ezek számtani közepe c_0=1. Ekkor $T(c_0) = 60,5\ (cm^2)$.

4. Oldd meg a valós számok halmazán! *a)* $x^2+3\geq 4x$, *b)* $\dfrac{x^2-4x+3}{x}\geq 0$ *c)* $x^2-4x+\dfrac{3}{(x-2)^2}=0$

a) Az $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény két zérushelye $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $f(x) \geq 0$, ha $x \leq 1$, vagy $x \geq 3$. 4 p.

b) A tört nemnegatív, ha számláló és a nevező azonos előjelű, ill. ha a számláló 0.
Ez $0 < x \leq 1$, ill. $x \geq 3$ esetén teljesül. 6 p.

c) ÉT.: $x\neq 2$. (*) 1 p. Legyen $y=(x-2)^2$, ekkor $x^2-4x=y-4$, az egyenlet $y-4+\dfrac{3}{y}=0$, $\Rightarrow y^2-4y+3=0$ 3 p.

Ennek megoldásai $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. A hozzájuk tartozó megoldások $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=2+\sqrt{3}$, $x_4=2-\sqrt{3}$. 4 p.
Az $y=(x-2)^2$-tel való beszorzás kivételével a lépések ekvivalens átalakítások voltak. A kapott gyökök nem esnek egybe (*)-gal, ezért mind a négy gyök jó. 2 p.
($x^4-8x^3+20x^2-16x+3 = 0$ alakért 2 p., kitalált gyökökért 1-1-p. adható)

Ö.: 20 p.

5. ***a)* Hány $\overline{xyxy}$ alakú négyjegyű szám van, ahol *x* és *y* különböző számjegyek? Hány lesz ezek közül 4-gyel osztható?**

$x\neq 0$, ezért x 9 féle, mivel $x\neq y$ ezért y is 9 féle értéket vehet fel,
tehát $9\cdot 9= 81$ db $\overline{xyxy}$ alakú szám van. 3 p.

$\overline{xyxy}$ akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha $\overline{xy}$ osztható 4-gyel. 1 p.
12-től 96-ig összesen 22 néggyel osztható szám van,
de ezek közül a 44 és a 88 nem jó, tehát összesen 20 db megfelelő szám van. 3 p.

***b)* Mely *n* természetes szám, és *x* és *y* számjegyekre lesz $1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{xyxy}$?**

$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 1 p. Ez akkor lesz négyjegyű, ha $45 \leq n \leq 140$. 3 p.

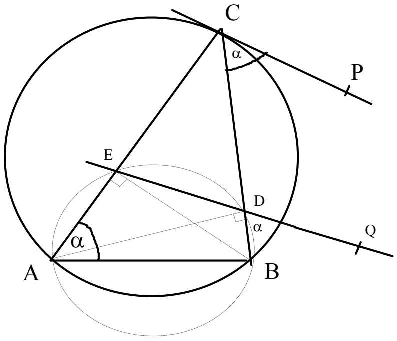
$\overline{xyxy} = 1000x + 100y + 10x + y = 101(10x+y)$. 2 p.

Az $n(n+1) = 2\cdot 101(10x+y)$ egyenlet megoldásait keressük, ahol $45 \leq n \leq 140$.
A jobb oldal osztható a 101 prímszámmal, ezért n vagy $n+1$ is osztható.
Az adott intervallumban csak $n=101$, vagy $n+1 = 101$ lehet. 3 p.

Mindkettő jó megoldást ad.
$n=101$ esetén $1 + 2 + 3 + ... + 101 = 5151$ tehát $x=5$, $y=1$. 2 p.
$n=100$ esetén $1 + 2 + 3 + ... + 100 = 5050$ tehát $x=5$, $y=0$. 2 p.

Ö.: 20 p.

6. Az ABC hegyesszögű háromszög A és B csúcsból húzott magasságai D és E pontban metszik a szemközti oldalt. A C csúcsban érintőt húzunk a háromszög köré írható körhöz. Igazoljuk, hogy az érintő párhuzamos a DE egyenessel ! Ha ACB∢ = 60°, és az ABC háromszög kerülete 12 cm, akkor mekkora az EDC háromszög kerülete?



A D és E magasságtalppontok illeszkednek az AB szakasz Thálesz-körére, ezért ABDE húrnégyszög. 3 p.

Így ha BAC∢ = α, akkor EDC∢ = α, mert mindkettő az EDB szöget egészíti ki 180° -ra. 3 p.

PCB szög szintén α, mert BC ívhez tartozó érintő szárú kerületi szög.
Mivel EDC∢ = BCP∢ , ezért CP || ED. 4 p.

ECDΔ ~ ABCΔ, mert megegyeznek két szögben. (ACB szög közös, és BAC∢ = EDC∢.) 3 p.

Ha ACB∢ = 60°, akkor az ADC derékszögű háromszögben a CD befogó fele az AC átfogónak.
Így az ECD és ABC háromszögek hasonlóságának aránya ½. 5 p.
Ezért az ADC háromszög kerülete 12 cm / 2 = 6 cm. 2 p.

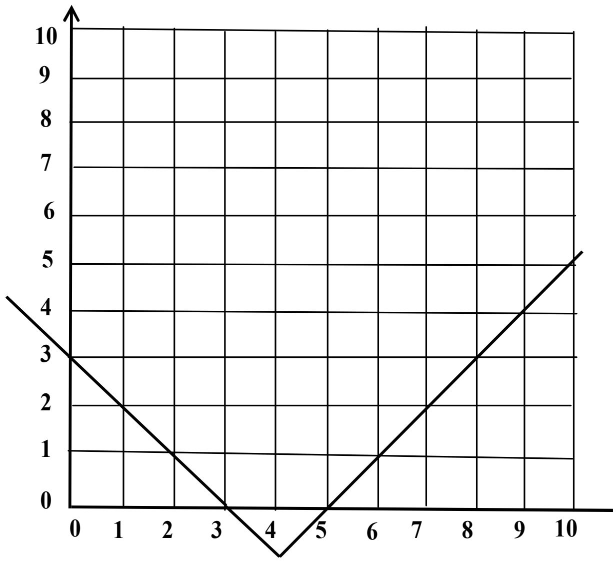
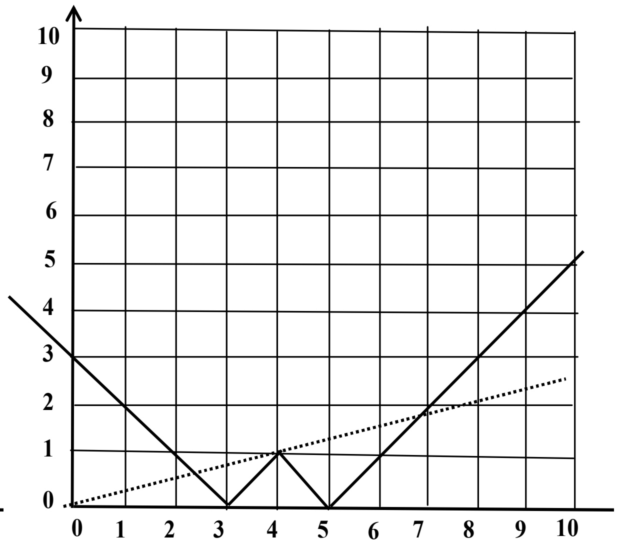
Ö.: 20 p.

7. ***a)*** **Ábrázold az f(x)= $|x-4|-1$ függvényt!**

b) **Ábrázold a g(x)= $||x-4|-1|$ függvényt!**

c) **Az *m* paraméter milyen értéke esetén lesz az $||x-4|-1|=mx$ egyenletnek pontosan egy, ill. pontosan két megoldása?**

d) **Az *m* paraméter milyen értéke esetén lesz az $||x-4|-1|=mx$ egyenletnek pontosan három megoldása? Mi lesz ez a három megoldás?**

a)	f(x)= $|x-4|-1$ függvény ábrázolása	2 p.
b)	g(x)= $||x-4|-1|$ függvény ábrázolása	2 p.
c)	Ha $m<-1$, akkor 1 megoldás van.	1 p.
	Ha $m\geq 1$, akkor 1 megoldás van.	2 p.
	Ha $m=0$, akkor 2 megoldás van.	1 p.
	Ha $1/4<m<1$, akkor 2 megoldás van.	2 p.
d)	Ha $m=1/4$, akkor 3 megoldás van.	1 p.
	Az egyik megoldás $x=4$. Valóban $||4-4|-1|=1/4\cdot 4$	1 p.
	Egy további megoldás lesz a (0;3) intervallumban, itt $||x-4|-1|=-x+3$, ezért itt a $-x+3=1/4x$ egyenlet megoldásait keressük, ami $x=12/5$. Valóban $||12/5-4|-1|=(1/4)\cdot(12/5)\Rightarrow 3/5=3/5$	4 p.
	A harmadik megoldás az $(5;\infty)$ intervallumban lesz, itt $||x-4|-1|=x-5$, ezért itt az $x-5=1/4x$ egyenlet megoldásait keressük, ami $x=20/3$. Valóban $||20/3-4|-1|=(1/4)\cdot(20/3)\Rightarrow 5/3=5/3$	4 p.

Ö.: 20 p.

0-24 p. - 1, 25–35 p. - 2, 36-47 p. – 3, 48 -59 p. – 4, 60 p. -- 5.

	1	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Ö.	Jegy
	13	12	15	20	20	20	20	100	