Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. Minden lap elejére írja fel a nevét, osztályát!

3. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges, de minden feladat megoldását a feladat sorszámával azonosítsa!

4. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja fel a dolgozat első oldalára jól felismerhetően a neve alá!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

5. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

6. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

7. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

8. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása.
   További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**

9. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell.
   Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

10. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

11. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

12. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén egyértelműen jelölje, hogy melyiket tartja érvényesnek!

I. rész

1.

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! *10 pont*

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}=(\sin\pi-\log_{10}100)^2-3^{\log_3 6}$$

b) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a pozitív valós számok halmazán! *4 pont*

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{2x-3}>1$$

2. Egy cinkelt érmével nagyobb valószínűséggel dobható fej, mint írás. Kétszer dobva ezzel az érmével, annak valószínűsége, hogy a két dobás eredménye nem ugyanaz: $p=0{,}3432$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezzel az érmével egyszer dobva a dobás eredménye írás lesz? *11 pont*

3. Hány olyan 10 000-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely

a) osztható 2-vel vagy 3-mal, de nem osztható 6-tal; *5 pont*

b) számjegyei között van legalább két azonos; *4 pont*

c) felírható a 2 pozitív egész kitevőjű hatványaként? *3 pont*

4. Egy 36 cm kerületű szabályos hatszögből kivágunk egy olyan szabályos háromszöget, melynek egyik oldala megegyezik a hatszög oldalával. A szemközti oldalra kifelé egy olyan félkört írunk, melynek átmérője megegyezik a hatszög oldalával.
Az így kapott alakzatot megforgatjuk a szimmetriatengelye körül.

a) Határozza meg a keletkezett fogástest térfogatát! *9 pont*

b) Határozza meg a keletkezett fogástest felszínét! *5 pont*

II. rész

5.

a) Igazolja, hogy a -1 első tagú, $d = 2$ differenciájú számtani sorozat első három tagja megoldása a

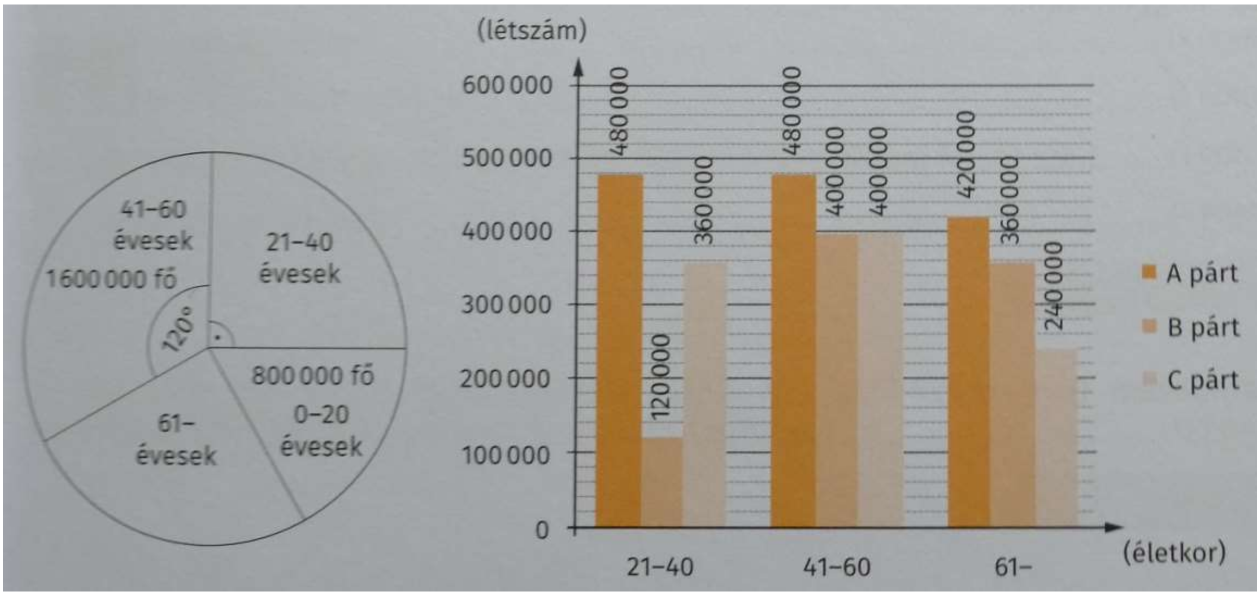
$$2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 0$$

egyenletnek, és az egyenletnek más megoldása nincs! *4 pont*

b) Oldja meg a $2\left(\log_{0,5} x\right)^3 - 6\left(\log_{0,5} x\right)^2 + \log_{0,5} \frac{1}{x^2} + 6 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán! *8 pont*

c) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 0$ függvény grafikonjának a koordinátatengelyekkel vett metszéspontjainak koordinátáit! *4 pont*

6. Egy ország állampolgárai közül a 21. életévüket betöltötték szavazhatnak. Az ország három legnagyobb pártjának, A-nak, B-nek és C-nek a korcsoportok szerinti támogatottságát az oszlopdiagram mutatja. Az ország lakosságának életkor szerinti megoszlását a kördiagram mutatja.



a) Mekkora középponti szög tartozik a 61 évnél nem fiatalabb korosztályt ábrázoló körcikkhez? *7 pont*

b) Hány százalékos az A, a B, illetve a C párt támogatottsága a szavazókorú népesség körében? *9 pont*

7. Oldja meg a $\sin 2x + 2\sin x - 2\cos x < 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! *16 pont*

8. Egy sóbányában 300 tonna só halmozódott fel. A tervek szerint naponta 3 tonnát kellett volna elszállítani, ám akadtak napok, amikor 7, és voltak napok, amikor 8 tonna sót szállítottak el. (Az összes többi napon a tervezett 3 tonnát szállították el.) Így 83 nap alatt befejeződött a só elszállítása. Hány napon szállítottak el 7, és hány napon 8 tonna sót a bányából? *16 pont*

9. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyikének pontosan egyszeri felhasználásával képezzük az összes lehetséges ötjegyű pozitív egész számot! Hány olyan van ezek között, amely

a) osztható 6-tal; *4 pont*

b) 20 000-nél nagyobb és páratlan; *3 pont*

c) 20 000-nél kisebb vagy 5-tel osztható; *6 pont*

d) négyzetszám? *3 pont*