

Ehhez hasonlóan a földművesek száma $e * P(\neg A)$. Azoknak a földműveseknek a száma, akikre illik a jellemzés: $e * P(\neg A) * P(B|\neg A)$.

$$P(A|B) = \frac{e * P(A) * P(B|A)}{e * P(A) * P(B|A) + e * P(\neg A) * P(B|\neg A)}$$

Látható, hogy e -vel lehet egyszerűsíteni.

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(A) * P(B|A) + P(\neg A) * P(B|\neg A)}$$

A nevezőt fel lehet egyszerűbben is írni, mivel ez mutatja annak a valószínűségét, hogy teljesül a jellemzés.

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(B)}$$

Ez lényegében a Bayes-tétel.

A bizonyítás felettebb egyszerű: jobb oldalt átírva a feltételes valószínűség definíciójára vezethető:

$$P(A|B) * P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Feladatok:

Egy kereskedő 3 termelőtől szerez be almákat. A vásárolt mennyiség 45%-a az első termelőtől származik, ennek fele első osztályú. A második termelőtől az összes mennyiség 35%-át szerzi be, ennek 70%-a első osztályú, míg a harmadik termelő csak első osztályú árut szállított. Kiválasztunk egy almát és az nem első osztályú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a második termelőtől származik?

Legyenek az események, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott alma az egyes termelőktől származik sorban X, Y és Z. Hogy az alma első osztályú E, és hogy az alma második osztályú M. A Bayes-tételt felírva:

$$P(Y|M) = \frac{P(Y) * P(M|Y)}{P(M)}$$

$$P(Y) = 35\% = 0,35$$

$$P(M|Y) = 1 - 70\% = 30\% = 0,3$$

$P(M)$ a teljes valószínűség tételével kiszámolható:

$$P(M) = P(X) * P(M|X) + P(Y) * P(M|Y) + P(Z) * P(M|Z)$$

$$P(M) = 0,45 * 0,5 + 0,35 * 0,3 + 0,2 * 0 = 0,33$$

$$P(Y|M) = \frac{P(Y) * P(M|Y)}{P(M)}$$

$$P(Y|M) = \frac{0,35 * 0,3}{0,33} = 32,82\%$$

Annak a valószínűsége, hogy egy nem első osztályú alma a második termelőtől való 32,82%

A következő táblázat az autóvezetők életkor szerinti éves baleseti statisztikáit tartalmazza.

életkor	baleset okozás valószínűsége	%-os megoszlás az összes autóvezető közül
-30	0,06	20%
30-50	0,02	45%
51-	0,04	35%

Ha egy adott évben az autóvezető nem okozott balesetet mekkora a valószínűsége, hogy 50 évnél idősebb?

$$P(C|N) = \frac{P(C) * P(N|C)}{P(N)}$$

O=okozott balesetet

N=nem okozott balesetet

A:=az autóvezető 30 év alatti $P(A)=0,2$

B:=az autóvezető 30 év és 50 év közötti $P(B)=0,45$

C:=az autóvezető 50 év feletti $P(C)=0,35$

$P(N|A)=1-P(O|A)= 1-0,06=0,94$

$P(N|B)=1-P(O|B)= 1-0,02=0,98$

$P(N|C)=1-P(O|C)= 1-0,04=0,96$

$$P(N) = P(A) * P(N|A) + P(B) * P(N|B) + P(C) * P(N|C)$$

$$P(N) = 0,2 * 0,94 + 0,45 * 0,98 + 0,35 * 0,96 = 0,965$$

$$P(C|N) = \frac{P(C) * P(N|C)}{P(N)} = \frac{0,35 * 0,96}{0,965} = 34,82\%$$

Annak a valószínűsége, ha valaki nem okozott balesetet, hogy 50 évnél idősebb: 34,82%

Egy vizsgán a hallgatók 60%-a első éves, 30%-uk másodéves, a többiek felsőbb évesek. Annak a valószínűsége, hogy egy hallgató vizsgán elért eredménye legalább közepes, rendre $6/25$, $9/20$, és $3/5$. Ha egy találmásra kiválasztott hallgató eredménye közepesnél gyengébb, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető első éves?

Egy géphez szükséges alkatrészt két helyről szerzünk be, az egyik helyről szállítottak hibátlan működésének valószínűsége $0,9$, a másik helyről származónak pedig 96% . Jelenleg az első típusúból 8 , a második fajtából 12 darab van összekeverve. Találmásra kivesszünk egy alkatrészt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az nem hibátlan?

Valamely üzletbe három termelőtől szállítanak egy terméket, amelynek 2% -a selejtes. A második termelőtől kétszer annyi terméket szállítanak, mint az elsőtől. A selejtarány az első termelőnél 4% a másodiknál 2% , míg a harmadiknál minden századik termék selejtes. Egy terméket véletlenszerűen kiválasztva mi a valószínűsége, hogy azt a harmadik termelőtől szállították?

További feladatok itt találhatóak:

<https://www.mateking.hu/system/files/docs/feladatok.bayes-tetel.teljes-valoszinuseg-tetele.pdf>

Készítette: Berta Csaba Zsolt