Euklideszi szerkesztések

Írta: Demkó Petra 12. C

1. Történeti háttér

Már a barlangrajzok között is voltak geometriai ábrák, egyes kultúrák pedig később megfogalmazott azonosságokat és tételeket is alkalmaztak, de a geometriát a görögök tették tudománnyá. A geometria szó görögül eredetileg földmérést jelent, mert a geometria kezdetleges formája a terület- és térfogatszámítás volt. Az ókori görögök végezték az első (általunk ismert) bizonyításokat és rengeteg tétel származik ógörög matematikusoktól (pl. Thalész-tétel, Pitagorasz-tétel). Euklidesz időszámításunk előtt 300 körül élt, 5 jelentős műve maradt fenn. Az Elemek című matematikakönyvében összegyűjtötte (illetve saját bizonyításokkal kibővítette) a kor ismereteit és összefüggő, logikus sorrendben írta le őket. Axiómákat és posztulátumokat fogalmazott meg, amik 2000 évig meghatározták a geometriát. A XIX. században Bolyai János, illetve Lobacsevszkij teremtette meg a nemeuklideszi geometriát, aminek mára sok területe van.

2. Axiómák és posztulátumok

Az axiómák alaptételek, kiindulási feltételek, amiket adottnak veszünk és nem vonunk kétségbe (itt pl. 2 egymástól különböző ponthoz tartozik egy egyenes, ami mindkét pontra illeszkedik). Euklidesz eredetileg kevés axiómát írt le, az első teljes axiómarendszert az euklideszi geometriára Hilbert német matematikus dolgozta ki a XIX. század végén.
A posztulátumok szintén alapigazságok, követelmények; itt: az euklideszi szerkesztés legegyszerűbb lépései, illetve az 5. posztulátum a párhuzamosságról (ennek vizsgálatából fejlődött ki a nemeuklideszi geometria). Egy szerkesztést akkor hívunk euklideszinek, ha az alábbi lépések véges sokszori alkalmazásával elvégezhető:

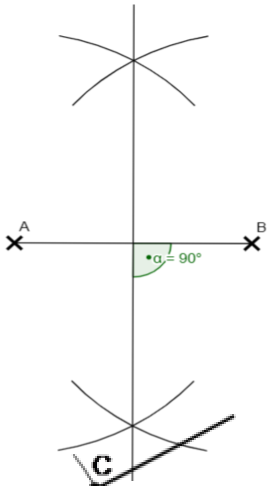
- a vonalzót két adott ponthoz illesztve megrajzolhatjuk a két ponton áthaladó egyenest;
- két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük;
- adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk;
- két metsző egyenes metszéspontját megkereshetjük;
- egy kör és azt metsző egyenes mindkét metszéspontját megkereshetjük;
- két egymást metsző kör mindkét metszéspontját megkereshetjük.

3. Szerkesztések

A legegyszerűbb szerkesztési lépésekből kiderül, hogy az euklideszi szerkesztésekhez körzőt és vonalzót (ill. ceruzát vagy más rajzeszközt) használhatunk, tehát az általános- és középiskolai szerkesztések is euklideszik.

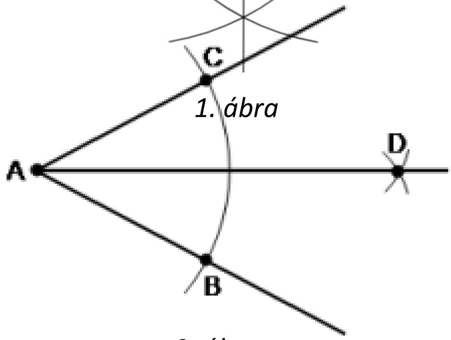
3.1. Egyszerű szerkesztések

- *(1. ábra)* A és B végpontú szakasz felezőmerőlegesének megszerkesztése: körzőnyílásba veszünk egy, a szakasz hosszának felénél nagyobb hosszúságú szakaszt (ez lehet az AB szakasz is); a körző nyílását nem változtatva A és B pontokból körzőzünk a szakasz mindkét oldalán úgy, hogy a 2-2 körív metssze egymást; a körívek metszéspontjait vonalzóval összekötjük egymással. A szakaszfelező merőleges definíciójából adódik a szerkesztés (minden pontja azonos távolságra van a szakasz 2 végpontjától).



1. ábra

- *(2. ábra)* szögfelező szerkesztése: a szög csúcsa A, innen körzőzünk tetszőleges körzőnyílással. A körív és a félegyenesek metszéspontjai B és C; körzőnyílásba veszünk egy, a BC távolság felénél nagyobb szakasz (ez lehet a BC szakasz is); a körző nyílását nem változtatva B és C pontokból körzőzünk (itt: a kisebb szögtartományban) úgy, hogy a 2 körív metssze egymást; a körívek metszéspontját vonalzóval összekötjük a szög csúcsával. A szögfelező definíciójából adódik a szerkesztés (minden pontja azonos távolságra van a szög két szárától).



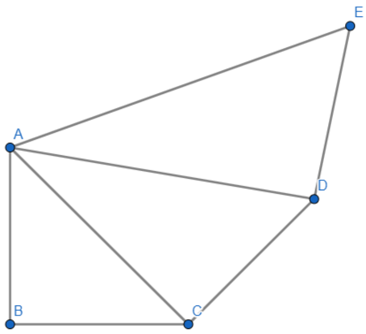
2. ábra

- összetettebb szerkesztésekben sokszor használjuk például a párhuzamosok szerkesztését, szakaszok n egyenlő részre osztását vagy szögmásolást; ezek szintén egyszerű szerkesztések, amiket most nem mutatok be

- nehezebb szerkesztés lenne a körök érintőinek megszerkesztése is, de ezeket már általános iskolában megtanuljuk, ezért lényegében ez is alapszerkesztés, de ezt sem mutatom be

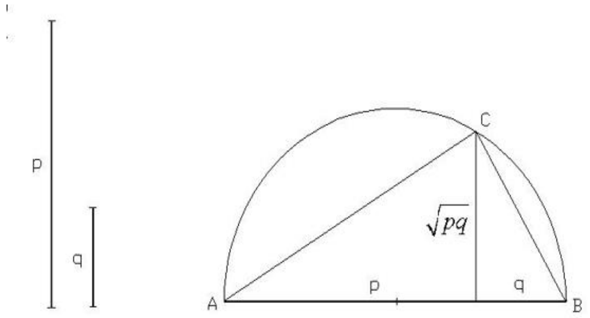
3.2. Érdekes szerkesztések

- négyzetgyökös kifejezések megszerkesztése
  - *(3. ábra)* egész szám négyzetgyöke (az egység ismeretében): az AB és BC szakaszok egységnyi hosszúak. Az ABC derékszögű háromszögre Pitagorasz-tételt felírva az átfogó $\sqrt{2}$ hosszúságú. Ha az átfogóra a C pontban egység hosszúságú merőlegest szerkesztünk, új derékszögű háromszög jön létre, aminek átfogója $\sqrt{3}$ lesz, stb. Nagyobb számokat ennél egyszerűbben is megszerkeszthetünk: meg kell keresnünk a gyök alatti számnál kisebb, legnagyobb négyzetszámot, pl. 189=169+20, ezért egy olyan derékszögű háromszög átfogója lesz, aminek befogói 13 és $\sqrt{20}$ (20=16+4, ezért ez könnyen megszerkeszthető).



3. ábra

- *(4. ábra)* két adott szakasz mértani közepe: adott p és q szakaszok hossza, ebből kell megszerkeszteni a mértani közepüket; a magasságtételt fogjuk felhasználni hozzá. **Tétel: A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó két szeletének a mértani közepe**. Vegyük fel a p hosszúságú szakaszt, majd egyik végpontjába a q hosszúságút (mint meghosszabbítást). Felezzük meg az AB szakaszt és AB/2 hosszú sugárral szerkesszük meg a szakasz Thalész-körét. A p és q szakaszok közös pontjába állítsunk merőlegest AB szakaszra. A merőleges és a Thalész-kör metszéspontja C. ABC derékszögű háromszögre pedig érvényes a magasságtétel, az átfogóhoz tartozó magasság p és q mértani közepe. (A két szakasz számtani közepe pedig a Thalész-kör sugara.)



4. ábra

- *(5. ábra)* Megszerkeszthető-e az ABC derékszögű háromszög, ha adott az AB átfogójának és az A csúcsból kiinduló szögfelezőjének a hossza?

A derékszögű háromszögeknél szokásos jelöléseket használjuk, a szögfelező f, talppontja D. Az a és b oldalak valamelyikét akarjuk kifejezni c és f segítségével, utána 2 (vagy Pitagorasz-tétellel kiszámolva 3) oldal és a derékszög ismeretében megszerkeszthető a háromszög.

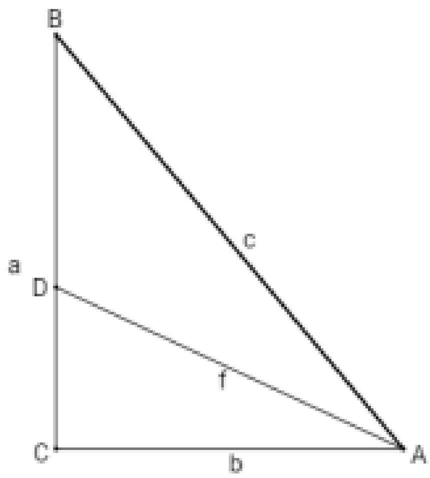
Írjunk fel szögfelezőtételt:

$$\frac{DC}{a} = \frac{b}{b+c}$$

Ebből kifejezve DC-t:

$$DC = a\frac{b}{b+c}$$

Írjunk fel Pitagorasz-tételt az ACD derékszögű háromszögre, illetve ABC derékszögű háromszögre:



5. ábra

$$\left(a\frac{b}{b+c}\right)^2 + b^2 = f^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$$

$$(c-b)(b+c)\left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + b^2 = f^2$$

$$(c-b)\frac{b^2}{c+b} + b^2 = f^2$$

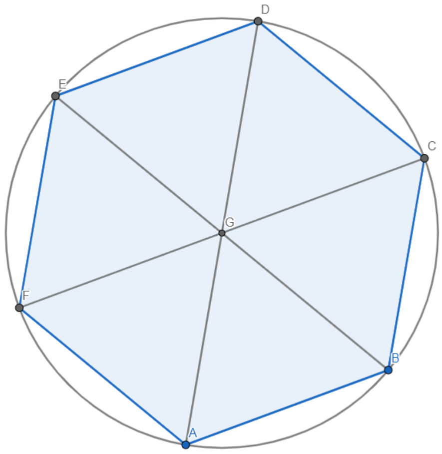
Szorozzunk be (b+c)-vel és vonjuk ki a jobb oldalon lévő összeget az egyenlet mindkét oldalából:

$$2b^2c - f^2b - f^2c = 0$$

Ez b-re nézve másodfokú egyenlet, aminek gyökeit meg tudjuk mondani. A fent leírt módon b ismeretében meg tudjuk szerkeszteni a háromszöget.

Ha a feladatban egy másik oldal vagy szögfelező lenne megadva, nem lehetne megszerkeszteni a háromszöget a 2 adatból.

- szabályos sokszögek szerkesztése: szabályos sokszögeket kör és középponti szögek segítségével szoktunk szerkeszteni. Például: *(6. ábra)* a szabályos hatszögnek 6 oldala van, a hatszög köré írható körben minden oldalhoz ugyanakkora középponti szög tartozik. A teljes szög 360°, ezt 6 egyenlő részre kell osztani, tehát egy oldalhoz 60°-os középponti szög tartozik. 60°-os szöget lehet szerkeszteni, ezért egy szabályos hatszög is megszerkeszthető. Szabályos n oldalú sokszöget tehát akkor tudunk ezzel a módszerrel szerkeszteni, ha lehet szerkeszteni 360°/n nagyságú szöget szerkeszteni.



6. ábra

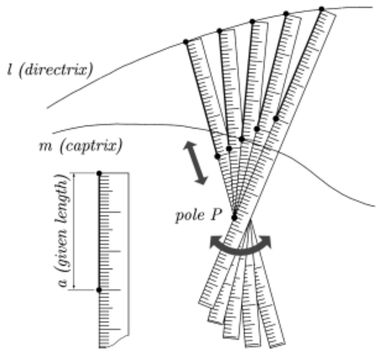
3.3. Nem szerkeszthetőség

Az euklideszi szerkeszthetőségnek algebrai feltételei vannak. Az algebra és a geometria közti összeköttetés a koordinátageometria, ezért a feltételek kimondása és bizonyítása általában derékszögű koordinátarendszerben történik. A feltételek és bizonyításaik megtalálhatók a források között.

- klasszikus nem szerkeszthető problémák: már az ókorban is voltak olyan feladatok, amik nem csak a tudósokat, hanem az átlagembert is foglalkoztatták.
  - déloszi probléma: a legenda szerint Délosz szigetén pestisjárvány tombolt és az istenek azt kérték, hogy a kocka alakú oltárkövet kettőzzék meg, és akkor elmúlik a járvány. A kőfaragók nem tudták, hogy az új kockának mekkora lesz az éle, és $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszt nem tudtak szerkeszteni. Ez a probléma a kockakettőzés. A $\sqrt[3]{2}$ gyöke az x^3-2=0 egyenletnek, ennek gyökei pedig nem szerkeszthetők az algebrai feltételek miatt.
  - szögharmadolás: az egyszerű szerkesztéseknél már láttunk példát a szögek felezésére, de a szögek harmadolása körzővel és vonalzóval nem lehetséges. Például: 60°-os szög szerkeszthető, de 20° nem. Ha a 20°-os szög szerkeszthető lenne, $\cos 20°$ is (egységnyi átfogóval és 20°-os szöggel rendelkező derékszögű háromszögben a 20°-os szög melletti befogó $\cos 20°$). A $\cos 3x = 4\,(\cos x)^\wedge 3 - 3\cos x$ összefüggésből $x =$ 20°-ra: $0{,}5 = 4(\cos 20°)^\wedge 3 - 3\cos 20°$. Az egyenletet szorozzuk meg 2-vel és vonjunk ki 1-et mindkét oldalából. Az így kapott hiányos harmadfokú egyenletnek szintén nem szerkeszthetők a gyökei, ezért 20°-os szöget sem lehet szerkeszteni.
  - kör négyszögesítése: szerkesszünk egy adott sugarú körrel megegyező területű négyzetet! A kör sugara r, a kör területe: $T_{kör}=r^2\pi$. Ha a négyzet oldala a, akkor $T_{négyzet}=a^2= r^2\pi$, amiből a négyzet oldala $r\sqrt{\pi}$. A szerkeszthetőség feltételei miatt $\sqrt{\pi}$ sem szerkeszthető.

4. Kitekintés: nemeuklideszi szerkesztések

- neuszisz-szerkesztés: adott egy szakasz, egy pont és 2 vonal; feladat: a szakaszt úgy megszerkeszteni, hogy a 2 vonal között legyen és a szakaszra illeszkedő egyenes átmenjen a ponton. A szerkesztésekhez használt eszköz a neuszisz-vonalzó. Ezt az adott P pontra illesztették, a szakasz hosszát a vonalzón lévő csúszkákkal beállították, így egyszerűen megoldható lett a feladat.



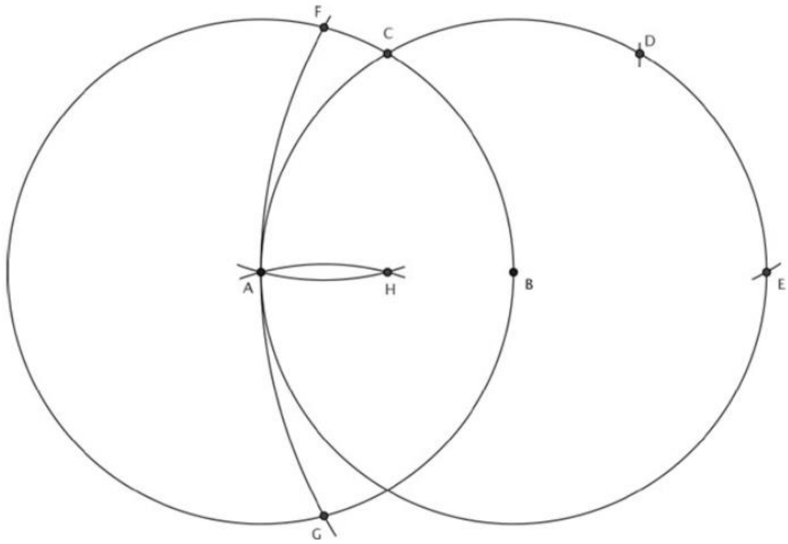
7. ábra

- egyéb speciális szerkesztési eszközök: ellipsziskörző, kúpszelet körző, konhoisz körző, cisszoisz körző (a konhoisz és a cisszoisz különböző görbék, a konhoisz megszerkesztéséhez egy pont és egy egyenes kell, a cisszoiszhoz egy kör és 2 egymásra merőleges átmérője)

- Poncelet-Steiner szerkesztések: **Nincs olyan csak vonalzós szerkesztési eljárás, mely bármely kör középpontját előállítaná.** Ebből az állításból az következik, hogy az euklideszi szerkesztéseket nem lehet elvégezni csak vonalzó segítségével. A Poncelet-Steiner szerkesztések alatt ezért olyan szerkesztéseket értünk, melyek során csak vonalzót használhatunk, de rögzítve van egy kör a középpontjával. A rögzített kört a szerkesztések során úgy használhatjuk, hogy akárhányszor elmetszhetjük azt egyenesekkel. Minden olyan pont és egyenes, mely euklideszi szerkesztéssel előállítható, az Poncelet-Steiner-féle szerkesztéssel is előállítható.

- Mohr-Mascheroni szerkesztések: az előző szerkesztésnél láttuk, hogy csak vonalzóval nem lehet megszerkeszteni az euklideszi szerkesztéseket. Minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés viszont csak körzővel is előállítható. Ezt a tételt általában inverzióval bizonyítják. Az inverzió egy (nem hasonlósági) geometriai transzformáció. Szükséges hozzá egy alapkör és egy pólus; az alapkör sugara r, az inverzió hatványa r^2. P pont képe P’, rájuk igaz a következő: P’ az OP félegyenesen van és $OP*OP'=r^2$. Azért az inverziót érdemes használni, mert a szerkesztések során nem húzhatunk egyenest, az inverzió pedig egyenes képének tud kört előállítani.

Példa: *(8. ábra)* 2 pont közti felezőpont meghatározása csak körzővel (a felezőpont a 2 pont által meghatározott egyenesen van és mindkét ponttól egyenlő távolságra van). A 2 pont A és B; szerkesszünk A és B középpontú, AB sugarú köröket! A körök egyik metszéspontja C. Az ABC háromszög szabályos, az ABC szög 60°-os; ha C-



8. ábra

ből még kétszer felmérjük a körön az AC távolságot, A, B és E egy egyenesre esik, meghatározzák a kör átmérőjét. E középpontú 2AB sugarú kört szerkesztünk, metszéspontjai az A középpontú körrel F és G. Az EAF háromszög egyenlő szárú, a szárak hossza kétszerese az alap hosszának. Az FAH háromszög szintén egyenlő szárú és ugyanez igaz az oldalak arányára, ezért a két háromszög hasonló, szögeik páronként egyenlők. A H pontot úgy lehet megszerkeszteni, hogy F és G középpontú FA=GA sugarú köríveket szerkesztünk, ezek metszéspontjai lesz A és H.

5. Források:

Frank Péter: Geometriai szerkeszthetőség (diplomamunka)

Maczkó Renáta: Geometriai szerkesztések (diplomamunka)

Pécsi Ágnes: Érdekes síkgörbék (diplomamunka)

Wikipédia: Euklidész (matematikus)

Képek: GeoGebra ingyenes geometria szoftver

http://matek.qwqw.hu/?modul=oldal&tartalom=1136842

https://duftin2018.blog.hu/2019/01/28/szakaszfelezo_meroleges

https://slideplayer.hu/slide/2200052/