Stratégiai játékok

- bevezetés a játékelméletbe -

Írta: Demkó Petra

Majdnem biztosra mondhatjuk, hogy mindenki szeret játszani - lehet szó fogócskáról, sakkról, vagy ötöslottóról. A játék szót általában szórakozással kapcsoljuk össze, pedig rengeteg játék használatos a számítástechnikában, gazdaságban vagy a mindennapi életünkben. Dolgozatom témájának a matematikai játékokat és a játékelmélet alapjait választottam.

A matematikai játékok közül azokat szeretném bemutatni, amelyekben (legalább) 2 játékos vesz részt és a játékoknak van meghatározott szabályrendszerük, amit minden játékos ismer és ezt egymásról is tudják. Ezeknek két nagy csoportja van: a szerencsejátékok és a stratégiai játékok. Előbbi menetét a játékosok nem befolyásolják; ezzel a területtel a valószínűségszámítás foglalkozik. A stratégiai játékokban a játékosok célja általában a saját győzelme, ami egyben a többiek veresége. A későbbiekben említett egyszerűbb, rövidebb játékokat kis stratégiai játékoknak nevezzük.

1. A Nim-játékok

A több, mint száz éves Nim-játékokat két személy játszhatja. Egy vagy több kupac kavicsból felváltva vehetnek el valamennyit a megbeszélt szabálynak megfelelően. Minden ilyen játékra van egy nyerő stratégia és előre meghatározható, hogy a kezdő vagy a második fog-e győzni. A nyerő stratégia meghatározása során visszafelé haladnak lépésenként attól az utolsó helyzettől, amiből meg lehet nyerni a játékot.

Általános példa:

Ha az asztalon egy kupac van, a benne lévő kavicsok száma n. A kupacból egy lépésben legfeljebb k darabot lehet elvenni ($k < n$), a játékosok felváltva lépnek. Az nyer, aki elveszi az utolsó kavicsot. Mi a nyerő stratégia?

Osszuk el n-et $k+1$-gyel! Az osztási maradék 1 és $k+1$ közé fog esni.

- Ha a maradék $k+1$ (azaz 0), a második játékos nyer. Ha az első játékos egy lépésben p kavicsot vesz el ($0 < p < k+1$), a másodiknak $k+1-p$ darabot kell elvennie, így a játék végén ő fogja elvenni az utolsót is.
- Ha a maradék r ($0 < r < k+1$), az első játékosnak van nyerő stratégiája. Az első lépésében r db kavicsot kell elvennie, így a kupacban $k+1$-gyel osztható számú kavics lesz, tehát alkalmazhatja az előző esetben leírtakat.

Ellenőrzésként fejben „lejátszhatjuk” a következőt: $n=26$, $k=2$. Melyik játékos nyer?

(válasz: az első játékos nyer)

Az ennél összetettebb Nim-játékokra is van nyerő stratégia, amennyiben a kupacok és a kavicsok száma véges.

Például:

Az asztalon 2 kupac van, az egyikben 19, a másikban 23 kavics van. A játékosok egy lépésben csak az egyik kupacból vehetnek el, de abból bármennyit. Az nyer, aki elveszi az utolsó kavicsot. Melyik játékos nyer, ill. mi a nyerő stratégia? (A kupacokban lévő kavicsok számának jelölése legyen *a-b,* amikor az egyik kupacban *a* db, a másikban *b* db kavics van)

Melyik az az utolsó helyzet, amiből biztosan nyerünk, tehát a másik veszít? Ha a kupacokban 0 és 1 kavics van a másik lépése után. Mivel feltételezzük, hogy a másik játékos a lehető legjobb lépéseket teszi, az *1-1* helyzeten kívül (ahonnan is muszáj volt ide lépnie) nem alakítana ki ilyen helyzetet; az utolsó előtti helyzet tehát az *1-1*. Könnyen rájöhetünk, hogy ha a kupacokban egyenlő számú kavicsot tudunk hagyni, akkor mi nyerünk. A nyerő stratégia tehát az, hogy a több kavicsot tartalmazó kupacból vegyünk el pont annyit, hogy $a=b$ alakuljon ki. Ebben a játékban a kezdésnél a kavicsok száma különböző volt, ezért az első játékos nyer, ha az első lépés után *19-19* helyzetet hoz létre. A második játékos ezt az egyenlőséget „elrontja”, az első újra kialakítja, stb. amíg el nem jut az *1-1* helyzethez. Ha a kupacokban eredetileg egyenlő számú kavics lett volna, a második játékos nyerne.

Ha nem csak 2, hanem 3 vagy több kupac van, a megoldás nem ennyire egyszerű. Ezek általánosítására nézzünk előbb egy példát:

3 kupacban 9, 11 és 15 db kavics van. Egy lépésben bármennyi kavicsot el lehet venni a kiválasztott kupacból. Az nyer, aki elveszi az utolsó kavicsot. Melyik játékos nyer és mi a nyerő stratégia?

Azt megállapíthatjuk, hogy az előző, 2 kupaccal játszott esethez hasonlóan senkinek nem érdemes egyenlő számú kavicsból álló kupacot az asztalon hagynia, ill. az összes kavicsot elvennie bármelyik kupacból. A nyerő stratégia kidolgozására ezután a kettes számrendszert kell használnunk. Ennek oka, hogy a kupacokban lévő kavicsok számát kettes számrendszerbe átírva és az így kapott számokat egymás alá írva egy lépés után legalább az egyik oszlopban megváltozik a páros-páratlan viszony. Ez a mostani példára a következő:

$$9=1*2^3+0*2^2+0*2^1+1*2^0=1001_2$$
$$11=1*2^3+0*2^2+1*2^1+1*2^0=1011_2$$
$$15=1*2^3+1*2^2+1*2^1+1*2^0=1111_2$$

1001
1011
1111

Ha például a 9-et 8-ra változtatnánk, azzal 1000_2 lenne az első sorban, tehát az utolsó oszlopban az 1 helyére 0-t írunk. Ezeket a változásokat végiggondolva megadhatjuk a nyerő stratégiát: mivel az utolsó nyerő helyzet itt 0-0-1, az utolsó lépés után páros lesz az oszlopokban a számjegyek összege, mindig olyan helyzetet kell kialakítanunk, hogy a másik játékos egy páratlan helyzetbe lépjen. Nézzük meg a kiindulási helyzetben a számjegyek összegét oszloponként: az első oszlopban 3, a másodikban 1, a harmadikban 2, a negyedikben 3, tehát 3 páratlan és 1 páros oszlop van. Van-e olyan lépés, ami mindhárom oszlopban párossá változtatja a számjegyek összegét? Van, például ha a 15 kavicsot tartalmazó kupacban csak 2-t hagyunk, tehát elveszünk 13-at. Ezután a második játékos vagy páratlan helyzetet tud kialakítani, vagy mindent elvenni az egyik kupacból, ami után a korábbi 2 kupaccal játszott játék győztes stratégiáját tudnánk alkalmazni, tehát mindenképpen mi (az első játékos) nyerünk.

Általánosan: ha kezdetben az oszlopokban lévő számjegyek összege minden oszlopban páros, akkor a második játékos nyer, bármilyen más esetben az első játékos nyer.

Természetesen még rengeteg fajtája van az ehhez hasonló kis stratégiai játékoknak, viszont ezeket csak „bemelegítés" céljából említettem meg. A következő játékokban a játékosok ugyanígy mindig győzelemre törekednek, viszont nem egymás után, hanem egyidejűleg kell döntést hozniuk. Itt a játékosoknak nem csak a végső győzelem a cél, hanem hogy a nyereményüket a lehető legnagyobbá vagy a vereségüket a lehető legkisebbé tegyék. Ezekkel a játékokkal foglalkozik a játékelmélet.

2. A játékelmélet

A játékelmélet azzal foglalkozik, hogy mi lenne az ésszerű döntés olyan helyzetekben, ahol minden résztvevő döntéseinek eredményét befolyásolja a többiek lehetséges választása. Már a XX. század előtt is mondtak ki erre vonatkozó tételeket, de csak a század közepére állt össze. Alapvető műveinek a magyar származású Neumann János könyveit tartják, a legjelentősebb az 1944-ben O. Morgenstern matematikussal közösen írt *Játékelmélet és gazdasági viselkedés* c. műve. A matematikusok nagyobb körben a század második felében, a hidegháborúk idején kezdtek el a játékelmélettel foglalkozni, hogy a korabeli konfliktusokra nyerő stratégiát találjanak ki. Az általa érintett tudomány például a közgazdaságtan, szociológia, pszichológia vagy biológia.

A játékelmélet leírásához és példáihoz először tisztáznunk kell pár alapfogalmat/tételt:

- kifizetőfüggvény: egy függvény, amellyel jellemezhetjük a játék kimeneteleit minden játékos számára. Két játékos esetén ezt megadhatjuk egy táblázattal/mátrixszal
- stratégiahalmaz: a szóba jövő stratégiák összessége
- zérusösszegű játék: amelyben a játékosok csak egymás kárára növelhetik nyereségüket
- nem zérusösszegű játék: amikor a két fél nemcsak egymástól, hanem egymással együttműködve valamilyen külső forrásból is nyerhet
- kooperáció: együttműködés; ellentéte a hűtlenség
- minimax: a maximális értékek közül a legkisebb
- maximin: a minimális értékek közül a legnagyobb
- nyeregpont/egyensúly pont: ha egy játszmában a minimax és a maximin megegyezik
- valamennyi kétszemélyes zérusösszegű játékban létezik mindkét fél számára optimális stratégia, mégpedig az egyéni tiszta stratégiák keveréke

Nézzünk meg egy (nem gyakorlati) példát a megértés könnyítésére!
A és *B* játékos megkapja ugyanazt a 3x3 elemből álló kifizetési mátrixot. *A* játékosnak egy sort, *B* játékosnak pedig egy oszlopot kell választania. A választott sor és oszlop meghatározza azt az elemet, amely megmondja, mennyit kell *B* játékosnak fizetnie. Mi az optimális az egyes játékosoknak?

		***B* játékos**		
		O1	O2	O3
***A* játékos**	S1	5	-2	1
	S2	6	4	2
	S3	0	7	-1

Mivel *B* játékosnak fizetnie kell, ő a lehető legkevesebb veszteséggel akarja lejátszani a játszmát, de tudja, hogy *A* játékos a legtöbbet akarja majd nyerni. *A* játékos ugyanekkor (mivel ő kapja a pénzt) a legtöbb nyereséget akarja, de tudja, hogy *B* játékos a lehető legkevesebbet akarja veszíteni. A feladat szövegét tehát az alapfogalmakkal leírva: *A* játékos a maximin értéket keresi a sorokban, *B* játékos pedig a minimax értéket az oszlopokban.

S1 legkisebb értéke: -2
S2 legkisebb értéke: 2
S3 legkisebb értéke: -1
Maximin: 2

O1 legnagyobb értéke: 6
O2 legnagyobb értéke: 7
O3 legnagyobb értéke: 2
Minimax: 2

A maximin és a minimax értéke tehát egyenlő, ezért ennek a játszmának van egyensúlypontja, ami mindkét játékosnak optimális. Az ilyen játékokat tiszta stratégiás játékoknak nevezzük. Várhatóan nem minden játék lesz tiszta stratégiás játék. Ezekben nincs olyan stratégia, amelyet követve mindkét félnek biztosan optimális lesz az eredmény, ezért bennük kevert stratégiákat kell alkalmazni.

Példa:

Labdarúgásban döntetlen esetén büntetőrúgásokkal döntenek. A kapus (neki) jobbra vagy balra vetődhet ill. középen maradhat, a lövő játékos pedig rúghat (neki) jobbra, balra vagy középre. Milyen stratégiát érdemes követniük?
Az alábbi mátrixszal írhatjuk le a gól esélyét (a mátrixban szereplő értékek egy statisztikán alapulnak):

		Kapus		
		J	K	B
Lövő	J	0,9	0,9	0,6
	K	0,8	0,1	0,7
	B	0,5	0,8	0,8

A maximin érték a kapusnál 0,6, a minimax érték pedig a lövőnél 0,8. Ez alapján tehát a 10 lövésből várhatóan 6 és 8 közötti lesz a gólok száma.

Mi a kapus optimális kevert stratégiája? (a lövő játékosra ez analóg kiszámítható)
Jelöljük a lövések valószínűségét p_j, p_k és p_b változókkal (rendre: ha a lövés jobbra, középre vagy balra megy)! E-vel jelöljük a játék várható értékét.
Tudjuk, hogy $p_j+p_k+p_b=1$
Ha a kapus…

- jobbra vetődik:
  $E=0{,}9p_j+0{,}9p_k+0{,}6p_b$
- középen marad:
  $E=0{,}8p_j+0{,}1p_k+0{,}7p_b$
- balra vetődik:
  $E=0{,}5p_j+0{,}8p_k+0{,}8p_b$

Ez egy 4 egyenletből álló négyismeretlenes egyenletrendszer.

Megoldása: $p_j=0{,}28$; $p_k=0{,}17$; $p_b=0{,}55$; $E=0{,}735$

A 10-ből tehát kb. 5-ször balra érdemes vetődnie, 3-szor jobbra, 2-szer pedig érdemes középen maradnia. A játék értéke a kapus számára 0,735.

A játékelméletben van pár klasszikus probléma, mint például a *nemek harca* vagy az ismert *fogolydilemma*. Előbbi arról szól, hogy egy házaspár együtt akarja tölteni az estét, de nem tudnak dönteni a programot illetően: a férfi meccsre, a nő színházba akar menni. Napközben nincs idejük megbeszélni, melyiket válasszák, ezért egymástól függetlenül elmennek az egyik helyszínre. Vajon mi a legjobb választás a feleknek? Kooperáció vagy hűtlenség?
A fogolydilemma lényege, hogy két vádlottat hallgatnak ki, szintén egymástól függetlenül. Ha mindketten a másik ellen vallanak, 6 évet kapnak, ha mindketten tagadnak, 6 hónapot. Ha az egyikük vall és a másik tagad, a bűnösnek ítélt 10 évet kap, az ellene valló pedig szabadon távozhat. Melyik eset lenne a legjobb, ha mindketten csak a saját érdekeiket tartják szem előtt?

Számos ehhez hasonló dilemma létezik, amelyeken jól látszik, milyen nagy szerepe van a matematikai játékoknak (és a matematikának) az életünkben. Minél összetettebb egy probléma, annál több matematikától független tényezőt (pl. az emberek személyisége, maga a szituáció) kell figyelembe vennünk, ezért az eredmény eltérhet a várttól. A játékelmélettel azonban sokkal közelebb kerültünk - és kerülhetünk a későbbiekben is - konfliktusok megoldásához, ezen kívül pedig viszonylag kevés elméleti tudással is érdekes dolgoknak számolhatunk utána az alkalmazásával.

Irodalomjegyzék:

A Matematika világa: Fogolydilemma és domináns stratégiák (Magyar Kiadás 2020. Eaglemoss Ltd.)

Dr. Nagy Tamás: Játékelmélet

Wikipédia: Játékelmélet