Numerikus módszerek

Készítette: Farkas Boróka

A legtöbb ember fejében meg sem fordul, hogy vannak a matematika világában olyan problémák, amelyek megoldása során csak közelítő, nem pontos értékek szolgálnak végeredményül. Ezek megoldásához szükség van úgynevezett numerikus módszerekre, amelyek az alkalmazott matematika alapját jelentik. Leggyakrabban folyamatok modellezésekor alkalmazzák, nagy szerepet játszik a kőolajkutatásban, különböző tárgyak formatervezésében és technikai eszközök (pl. GPS) gyártása esetén.

Ha adottak $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n$, valamint $f_1, f_2, \dots, f_n$ valós számok $(n \in N)$, akkor interpolációs polinomok segítségével meghatározható egy olyan $p(x)$ $n-1$-ed fokú polinom, amelyre teljesül, hogy minden $1 \le i \le n$ egészre $p(x_i) = f_i$. Ennek meghatározásához többféle módszer alkalmazható.

A Lagrange interpoláció esetén feltételezzük, hogy a megadott kezdőpontok egymástól különbözőek, valamint hogy a függvény egy értéket csak egyszer vehet fel. A megadott pontok egy lineáris egyenletrendszert határoznak meg a keresett együtthatókra vonatkozóan.

Erre az interpolációra igaz, hogy a polinomokat $p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i(x)$ alakban adja meg, ahol $L_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

A Newton-módszer lényege, hogy keresünk a gyökhöz egy elég közel álló pontot, amelynek függvényértéke nagy valószínűséggel a keresett pontból a függvényhez húzott érintő egyik pontja. A módszerhez szükséges feltételezni, hogy a függvény deriválható. A függvény deriváltjáról viszont közismert, hogy egy adott pontban a pontba húzott érintővel azonos. Ez alapján:

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} \rightarrow \; x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Az eljárást minél többször megismételve egyre pontosabb értéket kapunk.

Ezen kívül létezik a Hermite interpoláció, amely az adott függvényértékeken kívül legalább egy derivált értéket is felhasznál, valamint a Spline interpoláció, amely szakaszonként vizsgálja a megadott értékeket. Így elképzelhető, hogy a különböző módszereket felhasználva különböző interpolációs polinomok jönnek létre.

Például nevezetes szögek szögfüggvényei segítségével becslést adhatunk $\sin(1)$értékére.

$f(x) = \sin(x)\,, \qquad x \in R$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Határozzuk meg az $L_i(x)$ polinomokat a Lagrange-interpoláció alapján:

$$L_1(x) = \frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)(x-\frac{\pi}{2})}{\left(0-\frac{\pi}{6}\right)\left(0-\frac{\pi}{3}\right)(0-\frac{\pi}{2})} \qquad L_3(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)(x-\frac{\pi}{2})}{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)(x-\frac{\pi}{2})}{\left(\frac{\pi}{6}-0\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})} \qquad L_4(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)(x-\frac{\pi}{3})}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})}$$

Írjuk fel az interpoláló polinomot:

$$\boldsymbol{g(x)} = 0 * L_1(x) + \frac{1}{2}L_2(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}L_3(x) + L_4(x) =$$

$$= \frac{54\,x^3}{\pi^3} - \frac{45\,x^2}{\pi^2} + \frac{9\,x}{\pi} - \frac{54\sqrt{3}\,x^3}{\pi^3} + \frac{36\sqrt{3}\,x^2}{\pi^2} - \frac{9\sqrt{3}\,x}{2\,\pi} + \frac{36\,x^3}{\pi^3} - \frac{18\,x^2}{\pi^2} + \frac{2\,x}{\pi} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{90-54\sqrt{3}}{\pi^3}x^3 + \frac{36\sqrt{3}-63}{\pi^2}x^2 + \frac{11-4,5\sqrt{3}}{\pi}x}$$

$$g(1) = \frac{90-54\sqrt{3}}{\pi^3} + \frac{36\sqrt{3}-63}{\pi^2} + \frac{11-4,5\sqrt{3}}{\pi} = \boldsymbol{0,841086 \approx \sin(1)}$$

Ha ezt a polinomot a $4\pi + 1$ helyettesítési értéken vizsgáljuk, nem kapunk valós eredményt. Ez azért lehetséges, mert az $f(x) = \sin(x)$ függvény 2π-nként periodikus, a harmadfokú polinom azonban nem. Ezért érdemes a legkisebb és legnagyobb adott érték által meghatározott intervallumot úgy megválasztani, hogy a vizsgált érték eleme legyen az intervallumnak.

$$\boldsymbol{g(4\pi+1)} = \frac{90-54\sqrt{3}}{\pi^3}(4\pi+1)^3 + \frac{36\sqrt{3}-63}{\pi^2}(4\pi+1)^2 + \frac{11-4,5\sqrt{3}}{\pi}(4\pi+1) = \boldsymbol{-282.529}$$

Interpolációs polinomokat a meteorológiában is használnak, például így jósolják meg mérések alapján a várható hőmérsékletet egy adott időpontban, például délután 2 órakor.

Óra	6	12	18	24
Hőmérséklet (°C)	5	13	15	10

Határozzuk meg az $L_i(x)$ polinomokat Lagrange-módszerrel:

$$L_1(x) = \frac{(x-12)(x-18)(x-24)}{(6-12)(6-18)(6-24)} \qquad L_3(x) = \frac{(x-6)(x-12)(x-24)}{(18-6)(18-12)(18-24)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-6)(x-18)(x-24)}{(12-6)(12-18)(12-24)} \qquad L_4(x) = \frac{(x-6)(x-12)(x-18)}{(24-6)(24-12)(24-18)}$$

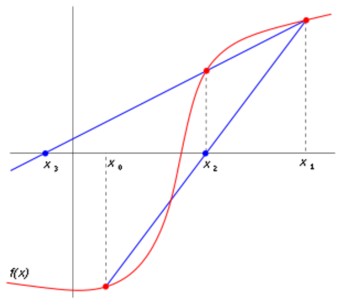
Írjuk fel az interpoláló polinomot:

$$\boldsymbol{h(x)} = 5L_1(x) + 13L_2(x) + 15L_3(x) + 10L_4(x) =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{5}{1296}x^3 + \frac{5}{24}x^2 - \frac{65}{18}x + 20 + \frac{13}{432}x^3 - \frac{13}{9}x^2 + \frac{247}{12}x - 78 - \frac{5}{144}x^3 + \frac{35}{24}x^2 \\ &\quad - \frac{35}{2}x + 60 + \frac{5}{648}x^3 - \frac{5}{18}x^2 + \frac{55}{18}x - 10 \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{1296}x^3 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{91}{36}x - 8} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{h(14)} = -\frac{2744}{1296} - \frac{196}{18} + \frac{1274}{36} - 8 = \boldsymbol{14{,}38\ ℃}$$

A fentebb említetteken kívül más gyökkereső algoritmusokat is használhatunk, például a szelőmódszert. Előnye, hogy számszerűen közelíti meg a függvényt, nem pedig a derivált segítségével. Lényege, hogy adottak x_n *és* x_{n-1} kezdeti pontok, és hozzájuk tartozó $f(x_n)$ és $f(x_{n-1})$ függvényértékek. Fontos, hogy a kezdeti pontok minél közelebb legyenek a keresett gyökhöz. Ezek alapján ábrázoljuk az $A\big(x_n;\ f(x_n)\big)$ és $B(x_{n-1};\ f(x_{n-1}))$ pontokat derékszögű koordinátarendszerben. Az A és B pontot összekötő egyenes jelenti a szelőt, amely az x-tengelyt metszve ($y = 0$) meghatározza a keresett gyököt (x_{n+1}). Az egyenes egyenletét felírva:



1. Szelő módszer

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

Ezt átalakítva:

$$f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_{n+1} - x_n) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n)$$

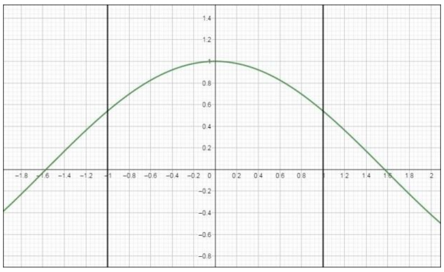
Ezzel a módszerrel megbecsülhető a $\sqrt{2}$ értéke. Az $f(x) = x^2 - 2$ függvénynek a $\sqrt{2}$ gyöke, ezért ezt érdemes alkalmazni. Legyen:

$$x_n = 1{,}45 \qquad\qquad f(x_n) = {x_n}^2 - 2 = 0{,}1025$$
$$x_{n-1} = 1{,}4 \qquad\qquad f(x_{n-1}) = {x_{n-1}}^2 - 2 = -0{,}04$$

$$\boldsymbol{x_{n+1}} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n) = 1{,}45 - \frac{1{,}45 - 1{,}4}{0{,}1025 + 004} * 0{,}1025 = \mathbf{1,414655}$$

A $\cos(x) = x$ egyenlet gyöke is meghatározható szelőmódszerrel.

$|\cos(x)| \leq 1$, ezért elég a függvényt a $[-1;1]$ intervallumon vizsgálni. Ha $x \in [-1;0[$, akkor x értéke negatív, a felvett érték pozitív, így ezen az intervallumon nem lesz megoldás. A $[0;1]$ intervallumon a függvényt az $y = x$ egyenes egy helyen metszi, így az egyenletnek egy megoldása van.



2. Cosinus-függvény

Mivel $\cos(x) = x$, ezért a $g(x) = \cos(x) - x$ függvénynek az x gyöke.

$$x_n = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad f(x_n) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$
$$x_{n-1} = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad f(x_{n-1}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$x = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}73668$$

Remélem, hogy a fentebb említett információk és példák megmutatták, hogy az alkalmazott matematika, és a numerikus módszerek egy olyan tudományterület, amelynek számos gyakorlati alkalmazása van, és érdemes vele foglalkozni.

Irodalomjegyzék

Obádovics J. Gyula: Felsőbb matematika

Baloghné Koterla Orsolya: Interpolációs eljárások

Gelle Kitti: Polinomok, Lagrange interpoláció

Wikipédia – Newton-módszer (https://hu.wikipedia.org/wiki/Newton-m%C3%B3dszer)

Wikipédia – Szelőmódszer (https://hu.wikipedia.org/wiki/Szel%C5%91m%C3%B3dszer)