Rendezési tétel

Készítette : Jurasits Bálint

1) *Tihamér 5-10 és 20 forintos pénzérméket tart a malacperselyében, mindegyikből végtelen darabot. Tihamér ma 6 pénzérmét szeretne kivenni a perselyből, úgy, hogy az egyik fajtából 1 darabot, egy másik fajtából 2 darabot, a harmadik fajtából 3 darabot vegyen ki. Hány 5-10 és 20 forintos érmét vegyen ki a perselyből, ha a lehető legnagyobb pénzösszeget szeretné kivenni? Hány 5-10 és 20 forintos érmét vegyen ki a perselyből, ha a lehető legkisebb pénzösszeget szeretné kivenni?*

Ez a feladat szinte triviális, de az összes lehetőség kiszámítása után bizonyított, hogy a helyes megoldások a következőek :

Legnagyobb pénzösszeg : 3db 20, 2db 10, 1db 5 forintos pénzérme

Legkisebb pénzösszeg : 3 db 5, 2db 10, 1 db 20 forintos pénzérme

a_1, a_2, a_3 a különböző pénzérméket; b_1, b_2, b_3 a számot, ami megadja, hogy egy pénzérmét hányszor vettünk ki a perselyből, és jelölje S a kivett pénzösszeget.

$$S = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3$$

Az S összeg akkor maximális, ha a legnagyobb „a” a legnagyobb „b” –vel, második legnagyobb „a” a második legnagyobb „b” –vel, harmadik legnagyobb „a” a harmadik legnagyobb „b”-vel kerül összeszorzásra.

Az S összeg akkor minimális, ha a legkisebb „a” a legnagyobb „b” –vel, második legkisebb „a” a második legnagyobb „b” –vel, harmadik legkisebb „a” a harmadik legnagyobb „b”-vel kerül összeszorzásra.

Ez lényegében a rendezési tétel.

A rendezési tétel

$A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n \}$, valós számok véges halmazának permutációja.

$B = \{ b_1, b_2, \dots , b_n \}$, valós számok véges halmazának permutációja.

A rendezési tétel állítása szerint az $S = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_n * b_n$ összeg akkor maximális, ha A és B azonosan rendezett, (Legnagyobb „a” a legnagyobb „b”-vel, n-edik legnagyobb „a” az n-edik legnagyobb „b”-vel kerül összeszorzásra.) és akkor minimális, ha A és B ellentétesen rendezett, (Legkisebb „a” a legnagyobb „b”-vel, n-edik legkisebb „a” az n-edik legnagyobb „b”-vel kerül összeszorzásra.)

A rendezési tétel bizonyítása

A-t és B-t rendezzük a következőképpen

$$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$$

$$b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$$

Ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, vagy $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, akkor az S összeg állandó.

Amennyiben ez nem teljesül, feltehető, hogy az S összeg nem akkor veszi fel a legnagyobb értéket, amikor minden „a_i” „b_i”-vel kerül összeszorzásra. Ekkor létezni kell legalább 2 olyan tagnak az összegben, $a_i * b_j$ és $a_k * b_l$, melyekre teljesül, hogy $i < j$ de $k > l$.

Ezek alapján : $(a_k - a_i)(b_j - b_l) > 0$

$$a_k * b_j - a_k * b_l - a_i * b_j + a_i * b_l > 0$$

$$a_k * b_j + a_i * b_l > a_i * b_j + a_k * b_l$$

Az összeg tehát tovább növelhető, mindaddig amíg az összes „a_i” „b_i”-vel kerül összeszorzásra, az efféle párosítás pedig azonos rendezés esetén valósul meg. Az S összeg tehát akkor lesz maximális, ha A és B azonosan rendezett. (Hasonlóan bizonyítható, hogy az összeg ellentétes rendezés esetén éri el a minimumát.)

A rendezési tétel rengeteg matematikai bizonyításhoz alkalmazható, ilyen például a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség bizonyítása, a Csebisev-összegegyenlőtlenség bizonyítása, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség bizonyítása, ezenkívül hasznunkra válhat az informatikában és optimalizációs problémák megoldása során is.

2) Bizonyítsuk be, hogy az $a, b, c > 0$ számokra teljesül, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

$A = \{ a , b , c \}$

$B = \{ a^2 , b^2 , c^2 \}$

azonosan rendezettek

$S = a * a^2 + b * b^2 + c * c^2$ a lehető legnagyobb összeg, bármely más rendezés kisebb összeget eredményezne

$$a * a^2 + b * b^2 + c * c^2 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

Az állítás bizonyított. Egyenlőség $a = b = c$ esetén lép fel.

3) Bizonyítsuk be, hogy az $a, b, c > 0$ számokra teljesül, hogy

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$$

$a * b * c$ –vel való leosztás után

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a + b + c$$

$A = \{ a^2 , b^2 , c^2 \}$

$B = \{ \frac{1}{a} , \frac{1}{b} , \frac{1}{c} \}$

ellentétesen rendezettek

$S = a^2 * \frac{1}{a} + b^2 * \frac{1}{b} + c^2 * \frac{1}{c}$ a lehető legkisebb összeg, bármely más rendezés nagyobb összeget eredményezne

$$a^2 * \frac{1}{a} + b^2 * \frac{1}{b} + c^2 * \frac{1}{c} \leq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}$$

Az állítás bizonyított. Egyenlőség $a = b = c$ esetén.

4) Bizonyítsuk be, hogy az $a, b, c > 0$ számokra teljesül, hogy

$$ab^5 + bc^5 + ca^5 \geq abc(a^2b + b^2c + c^2a)$$

$a * b * c$ –vel való leosztás után

$$\frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} + \frac{a^4}{b} \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

$A = \{ a^4 , b^4 , c^4 \}$

ellentétesen rendezettek

$B = \{ \frac{1}{a} , \frac{1}{b} , \frac{1}{c} \}$

$S = a^3 + b^3 + c^3$ a lehető legkisebb összeg, bármely más rendezés nagyobb összeget eredményezne

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} + \frac{a^4}{b}$$

A második feladat alapján : $a^2b + b^2c + c^2a \leq a^3 + b^3 + c^3$

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} + \frac{a^4}{b}$$

Az állítás bizonyított. Egyenlőség $a = b = c$ esetén.

A rendezési elvvel az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskolában ismerkedtem meg először.

További források :
https://web.archive.org/web/20131205104513/http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/Rearrangement_Inequality

https://en.wikipedia.org/wiki/Rearrangement_inequality

További feladatok és azok megoldásai :

https://brilliant.org/wiki/rearrangement-inequality/