A Grandi-paradoxon

Készítette: Tóth Lilla Eszter

A matematikai analízis kezdetei a XVII. századra tehetők, melynek során egyre nagyobb teret kapott a sorozatok, sorok, határértékek tanulmányozása, elméletek és definíciók születtek. Eközben időnként paradoxonok is megjelentek. Guido Grandi itáliai szerzetes egy ilyen paradoxonnal találkozott, miközben a később róla elnevezett végtelen sor összegét próbálta meghatározni:

$$G = 1-1+1-1+\ldots$$

Az ellentmondás abban állt, hogy végeredményként többféle sorösszeget is kaphatunk, ha különböző módokon próbáljuk azt előállítani; mindeközben viszont egy műveletsor eredménye csak egyféle lehet.

Az eltérő összegek a következőképpen jöttek létre:

1. Tegyünk zárójeleket a műveletsorba!

$1-1+1-1+\ldots = (1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots = 0$

2. Az $1-1+1-1+\ldots$ összeget felfoghatjuk úgy is, hogy az $1+(-1)+1+(-1)+\ldots$ Ekkor az 1-eseket az előzőtől eltérően csoportosíthatjuk:

$1+[(-1)+1]+[(-1)+1]+\ldots = 1+0+0+\ldots = 1$

3. Legyen $1-1+1-1+\ldots = S$!

Ebben az egyenlőségben vegyük mindkét oldal ellentettjét, majd adjunk hozzá mindkét oldalhoz 1-et!

$-1+1-1+1-\ldots = -S$

$1-1+1-1+\ldots = 1-S$

Látjuk, hogy a baloldali érték megegyezik S-sel, tehát $S = 1-S$, ebből azt kapjuk, hogy $S = \frac{1}{2}$.

Feltehetjük a kérdést a kor matematikusaival együtt, hogy hol a hiba ebben a gondolatmenetben. A választ mintegy 150 évvel később Cauchy adta meg azáltal, hogy definiálta a konvergens sorozatokat, ennek következtében pedig a sorok összegezhetőségét is.

A Cauchy-kritérium szerint az a_n sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan N, hogy minden $N \leq n$, m-re $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

Mivel egy sor összege megegyezik a részletösszegeiből alkotott sorozat határértékével, ezért ez a sorozat konvergens kell legyen ahhoz, hogy a sornak létezzen az összege.

Ezzel szemben látjuk, hogy a Grandi-sor részletösszegei a következők: {1, 0, 1, 0…}, tehát ennek a sorozatnak két torlódási pontja van, de határértéke nincs. A sor divergens volta ugyancsak szembetűnő, ha arra gondolunk, hogy ez egy mértani sor:

G = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, ahol |q| = 1, ezért a sor nem lehet konvergens.

Mivel a sor divergens, ezért az összeg végtelen, amivel nem végezhetünk úgy műveleteket, mintha véges értékekről lenne szó.

Tehát Cauchy definíciója alapján a Grandi-sor összege nem létezik.

Érdekesség, hogy más divergens sorok összegzésére tett kísérlet során időnként még meglepőbb eredmények születnek, erre jó példa a $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$.

Legyen a sor összege x!

$x = 1+2+4+\ldots+2^k+\ldots$
$2x = 2+4+8+\ldots+2^{k+1}+\ldots$

Ekkor a felső egyenletet az alsóból kivonva azt kapjuk, hogy x = -1, tehát végtelen sok pozitív szám összege negatív lenne.

Ugyanakkor bizonyos divergens sorok esetében – a Grandi-sor is ezek közé tartozik – bevezethetünk egy összegjellegű mennyiséget, azaz a sor szummáját. (Emiatt nevezzük az ilyen tulajdonságú sorokat szummábilisnak.)

A szumma az összeghez hasonló módon állítható elő azzal a különbséggel, hogy itt a részletösszegek sorozata helyett a részletösszegek számtani közepeiből képzett sorozatnak vesszük a határértékét. Ez az eljárás Cesàro-összegzésként is ismeretes.

Nézzük meg, hogyan határozhatjuk meg általánosságban egy végtelen sor Cesàro-összegét!

Legyen $\{a_n\}$ egy végtelen valós számsorozat! Ennek tagjait összeadva kapunk egy végtelen sort: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Ezen sor n-edik részletösszegét jelöljük s_n-nel!

$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ($n \in N$)

A részletösszegek sorozatából elő kell állítanunk a Cesàro-közepet, azaz a részletösszegek számtani közepeiből álló sorozatot, amit σ_n-nel jelölünk:

$$\sigma_n = \frac{s_0+s_1+s_3+\cdots+s_n}{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} s_k}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$$

Jelöljük a keresett Cesàro-összeget s_c-vel, ami tulajdonképpen a Cesàro-középek sorozatának határértéke!

$$s_c = \lim_{n \to \infty} \sigma_n$$

Ebből következik az is, hogy egy sornak akkor létezik a Cesàro-szummációja, ha a σ_n sorozat konvergens.

Ezek alapján határozzuk meg a Grandi-sor Cesàro-szummáját!

$s_0 = 1$
$s_1 = 0$
$s_2 = 1$ ...

$$\sigma_n = \frac{s_0+s_1+s_3+\cdots+s_n}{n+1} = \frac{1+0+1+0+\cdots}{n+1}$$

Itt két részre kell bontanunk a feladatot azért, hogy külön vizsgáljuk a páratlan és páros n-eket.

a) n páratlan

Mivel az első részletösszeg s_0, ezért ebben az esetben a számlálóban páros darab tag fog szerepelni, tehát ugyanannyi 0 lesz, mint 1, mindegyikből $\frac{n+1}{2}$, hiszen összesen n+1 tagja van a számlálónak. Ez azt jelenti, hogy:

$$\sigma_n = \frac{1+0+1+0+\cdots}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2}*1+\frac{n+1}{2}*0}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}*(n+1)}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Tehát páratlan n esetén mindig $\frac{1}{2}$-et kapunk, tehát ez a σ_n határértéke is.

b) n páros

Ebben az esetben is felírhatjuk a Cesàro-közepet azzal a különbséggel, hogy most a számlálóban 1-gyel több 1-es lesz, mint 0. Ekkor 0-ból $\frac{n}{2}$ darab lesz, míg 1-esből $\frac{n}{2}+1$.

$$\sigma_n = \frac{1+0+1+0+\cdots}{n+1} = \frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)*1+\frac{n}{2}*0}{n+1} = \frac{\frac{n}{2}+1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}$$

Számoljuk ki σ_n határértékét!

Ránézésre látjuk, hogy $\frac{1}{n+1} \to 0$, ezért $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{2(n+1)}$.

$$\frac{n}{2(n+1)} = \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2+\frac{2}{n}} \to \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Tehát ezen az ágon is $s_C = \lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$ adódik.

Ezzel meghatároztuk a Grandi-sor Cesàro-összegét.

A szumma értéke kapcsán – és egyben dolgozatom végén – visszatérhetünk történetünk elejére, ugyanis a paradoxon okán magát Grandit is megkérdezték, hogy szerinte a három érték közül melyik a sor valódi összege. Ő elképzelését – miszerint az eredmény $\frac{1}{2}$ – egy gyakorlati példával magyarázta meg:

Egy apának két lánya van. Az apa élete végén rájuk hagy egy értékes gyémántot, amit a lányok igazságosan szeretnének „elosztani" maguk között. Azt találják ki, hogy felváltva fogják birtokolni a drágakövet, egy hónapig az egyik, következő hónapban a másik. Az a lány, aki kezdi a folyamatot, az első hónap elején kap 1 gyémántot, azonban a második hónap elején át kell adnia, ezért ez -1 gyémántot jelent, de a harmadik hónapra ismét lesz 1 gyémántja, és így tovább.

Ha az év végén visszatekintünk erre az időszakra, látjuk, hogy ez a lány összesen 6 hónapig birtokolta a drágakövet, ami pontosan az év fele.

Források:

Pósa Lajos matematikatáborai

https://thatsmaths.com/2018/07/12/grandis-series-divergent-but-summable/

https://www.youtube.com/watch?v=PCu_BNNI5x4

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_valos_analizis_1-2/ch27s04.html

https://regi.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop412A/2011_0025_mat_1/ch06.html